Correction du DS6

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit (E_n) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = X^n \qquad \text{et} \qquad P(0) = 0 \qquad\qquad (E_n)$$

On pose également (E) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = 0 \qquad\qquad (E)$$

1.
   - Si $P = 1$, alors $P(X+2) - P(X) = 1 - 1 = 0$ donc $\boxed{P = 1 \text{ est une solution de } (E).}$
   - Si $P = \frac{X}{2}$, alors $P(X+2) - P(X) = \frac{X+2}{2} - \frac{X}{2} = 1 = X^0$. De plus $P(0) = \frac{0}{2} = 0$ et donc $\boxed{P = \frac{X}{2} \text{ est une solution de } (E_0).}$
   - Si $P = \frac{X^2}{2}$, alors $P(X+2) - P(X) = \frac{(X+2)^2}{2} - \frac{X^2}{2} = \frac{2X+4}{2} = X + 2$. Donc $\boxed{P = \frac{X^2}{2} \text{ n'est solution d'aucune équation pré-citée.}}$
2. (a) Soit P une solution de (E) telle que $\deg(P) \geqslant 1$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on sait que P admet une racine complexe. Donc $\boxed{\exists \alpha \in \mathbb{C},\ P(\alpha) = 0}$.

   (b) Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ la propriété « $\alpha + 2k$ est une racine de P ».
   - *Initialisation.* Si $k = 0$ alors $\alpha + 2 \times 0 = \alpha$ est une racine de P d'après la question précédente. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors $P(\alpha + 2k) = 0$. Or P est une solution de P donc en évaluant cette équation en $\alpha + 2k$, on a

     $$P(\alpha + 2k + 2) - \underbrace{P(\alpha + 2k)}_{=0} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad P(\alpha + 2(k+1)) = 0 \qquad \text{car } \alpha + 2k \text{ est une racine de } P.$$

     Donc $\alpha + 2(k+1)$ est aussi une racine de P et donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
   - *Conclusion.* Par récurrence, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie i.e. $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \alpha + 2k \text{ est une racine de } P.}$

   (c) D'après les questions précédentes, on a montré que si P est une solution de (E) telle que $\deg(P) \geqslant 1$ alors P admet une infinité de racines distinctes. On en déduit que dans ce cas P est nécessairement le polynôme nul ce qui contredit le fait que $\deg(P) \geqslant 1$. Dès lors les seules solutions possibles de (E) sont les polynômes constants. Soit $P = C$ un polynôme constant, $C \in \mathbb{R}$. Alors $P(X+2) - P(X) = C - C = 0$ et donc tous les polynômes constants sont solutions de (E).
   $\boxed{\text{Conclusion : l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \mathbb{R}_0[X].}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient P et Q deux solutions de (E_n). Alors,

   $$\begin{cases} P(X+2) - P(X) = X^n, & P(0) = 0 \\ Q(X+2) - Q(X) = X^n, & Q(0) = 0 \end{cases}$$

   On pose $R = P - Q$, par soustraction des deux égalités ci-dessus,

   $$R(X+2) - R(X) = 0.$$

   Autrement dit R est une solution de (E). Donc d'après la question précédente, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $R = P - Q = C$. En évaluant en 0, on obtient $R(0) = 0 - 0 = C$ et donc $C = 0$ et $P = Q$ ce qui démontre que $\boxed{(E_n) \text{ admet au plus une solution}}$.

4. Soit P une solution de (E_n).
   (a) Par dérivation d'une composée, en posant $Q = P\left(X+2\right)$, on a $Q' = 1 \times P'\left(X+2\right) = P'\left(X+2\right)$ et de même pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q^{(k)} = P^{(k)}\left(X+2\right)$ en particulier $Q^{(n+1)} = P^{(n+1)}\left(X+2\right)$. De même la dérivée $n+1$-ième de $P(X) = P$ est bien $P^{(n+1)}(X)$. Donc en dérivant $n+1$ fois l'égalité $P(X+2) - P(X) = X^n$, on obtient que
$$P^{(n+1)}\left(X+2\right) - P^{(n+1)}\left(X\right) = 0.$$
   Ainsi $\boxed{P^{(n+1)} \text{ est une solution de } (E).}$
   (b) D'après la question précédente et la question 2, on sait que $P^{(n+1)}$ est un polynôme constant et donc nécessairement $\boxed{\deg\left(P\right) \leqslant n+1}$.
5. D'après la question précédente, on sait que si P est une solution de (E_1) alors $\deg\left(P\right) \leqslant 2$. Soient $(a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^3$ et $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. On a alors les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} P \text{ est solution de } (E_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 + a_1\left(X+2\right) + a_2\left(X+2\right)^2 - \left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2\right) = X \\ \text{et} \quad a_0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_1 X + 2a_1 + a_2 X^2 + 4a_2 X + 4a_2 - a_1 X - a_2 X^2 = X \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 = 0 \quad \text{et} \quad 4a_2 X + 2a_1 + 4a_2 = X. \end{aligned}$$
   Par unicité des coefficients d'un polynôme,
$$\begin{aligned} P \text{ est solution de } (E_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ 4a_2 = 1 \\ 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = \frac{1}{4} \\ a_1 = -2a_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad P = \frac{X^2 - 2X}{4}. \end{aligned}$$
   Finalement, $\boxed{\text{l'unique solution de } (E_1) \text{ est } P = \frac{X^2-2X}{4}}$.

Problème 2 - d'après Banque PT 2014

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par
$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$
et on note f_n la fonction polynomiale associée à P_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(x^{n+1}\right)$$
$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$
   Donc en faisant la différence, on obtient que $\exp(x) - f_n(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(x^{n+1}\right)$ et par conséquent,
$$\boxed{\exp(x) - f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.}$$

- Si n est pair alors $n+1$ est impair et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 0$. Or deux équivalents sont de même signe au voisinage du point considéré. Donc pour tout x au voisinage de 0, $\exp(x) - f_n(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 0$.

  Ainsi, si n est pair, au voisinage de 0 la courbe de la fonction exponentielle est au-dessus de la courbe de la fonction f_n dans les positifs et en dessous dans les négatifs.

- Si n est impair, $n+1$ est pair et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geqslant 0$. Or deux équivalents sont de même signe au voisinage du point considéré. Donc pour tout x au voisinage de 0, $\exp(x) - f_n(x) \geqslant 0$.

  Si n est impair, au voisinage de 0, la courbe de la fonction exponentielle est au-dessus de la courbe de la fonction f_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On a d'une part,
   $$\boxed{P_n' = \sum_{k=1}^{n} k\frac{X^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = P_{n-1}.}$$
   D'autre part,
   $$\boxed{P_n' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} - \frac{X^n}{n!} = P_n - \frac{X^n}{n!}.}$$
   (b) Montrons que P_n ne possède que des racines simples et procédons par l'absurde. Supposons que P_n possède une racine de multiplicité au moins 2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une telle racine. Alors on sait que $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$. D'après la question précédente, on obtient que $0 = 0 - \frac{\alpha^n}{n!}$ et donc $\alpha = 0$. Or 0 n'est pas racine de P_n car $P_n(0) = 1 + 0 = 1 \neq 0$. On obtient donc une contradiction.

   Conclusion, P_n ne possède que des racines simples.

Partie II

On considère la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0;1], \quad g(x) = x\ln(x).$$

1. On considère également $h : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par
   $$h(x) = \sqrt{|x|}g(|x|)$$
   (a) La fonction g est continue sur $]0;1]$ comme produit de deux fonctions continues sur $]0;1]$. De plus par croissance comparée, on a
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0 = g(0).$$
   Donc g est continue en 0. Donc $\boxed{g \text{ est continue sur } [0;1]}$. Donc par composée de $x \mapsto |x|$ continue sur $[-1;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$ et g continue sur $[0;1]$, on en déduit que $x \mapsto g(|x|)$ est continue sur $[-1;1]$. De même $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est continue sur $[-1;1]$ et par produit $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est continue sur } [-1;1]}$. La fonction g est continue sur le **segment** $[0;1]$. Or toute fonction continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes) donc $\boxed{g \text{ est borné sur } [0;1] \text{ et } \sup_{x\in[0;1]} |g(x)| \text{ existe}}$.

   (b) La fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1]$ comme produit de fonctions $\mathscr{C}^1$. Donc par produit et composées, la fonction h est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;0[\cup]0;1]$. De plus,
   $$\forall x > 0, \quad h(x) = \sqrt{x}x\ln(x) = x^{3/2}\ln(x)$$
   $$\forall x < 0, \quad h(x) = (-x)^{3/2}\ln(-x).$$
   Donc,
   $$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\ln(x) + \sqrt{x}$$
   $$\forall x < 0, \quad h'(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{-x}\ln(-x) - \sqrt{-x}$$

A nouveau par croissance comparée, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h'(x) = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h'(x).$$

Dès lors, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h'(x)$ existe. Donc d'après le théorème de prolongement de fonction de classe $\mathscr{C}^1$, on en déduit que h est $\mathscr{C}^1$ en 0 (et $h'(0) = 0$).

$\boxed{\text{Conclusion, } h \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [-1;1].}$

(c) D'après le cours une fonction admet un développement d'ordre 1 en 0 si et seulement si cette fonction est dérivable en 0. Or h est $\mathscr{C}^1$ en 0 et est donc dérivable en 0. De plus $h(0) = h'(0) = 0$. Donc $\boxed{h \text{ admet un développement limité en 0 à l'ordre 1 et}}$

$$\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{=} 0 + 0x + o(x) = o(x).}$$

(d) Montrons que h' n'est pas dérivable en 0 et que donc h n'est pas deux fois dérivable en 0. On a vu que $h'(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}\ln(x) + \sqrt{x}}{x} = \frac{3\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}.$$

Par quotient de limite ($3\ln(x) + 2 \to -\infty$ et $\sqrt{x} \to 0^+$), on en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}} = -\infty.$$

Donc h' n'est pas dérivable en 0 et donc $\boxed{h \text{ n'est pas deux fois dérivable en } 0}$.

2. (a) Soit $\mathscr{D}'$ le domaine de dérivabilité de g. La fonction g est le produit de fonctions dérivables sur $]0;1]$ et est donc dérivable sur $]0;1]$: $]0;1] \subseteq \mathscr{D}'$. Montrons que g n'est pas dérivable en 0. Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x\ln(x)}{x} = \ln(x).$$

D'où

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -\infty.$$

Donc g possède une tangente verticale en 0 et n'est pas dérivable en 0.

Conclusion : $\boxed{\text{son domaine de dérivabilité est } \mathscr{D}' =]0;1]}$.

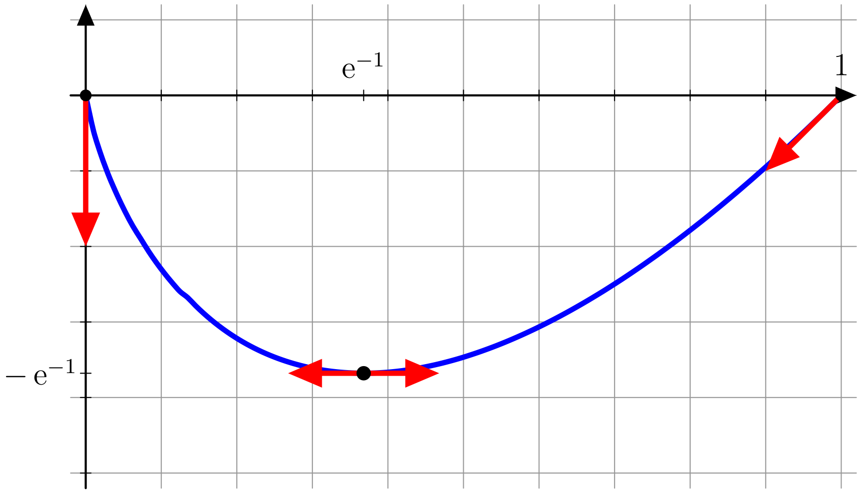
(b) On a pour tout $x \in]0;1]$, $g'(x) = \ln(x) + 1$ qui est une fonction strictement croissante sur $]0;1]$ étant la somme d'une fonction strictement croissante et d'une fonction constante. De plus pour $x \in]0;1]$,

$$g'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) \geqslant -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

Enfin $g\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = -\mathrm{e}^{-1}$. On en déduit donc le tableau suivant :

x	0		e^{-1}		1
g'	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$g(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	0

En déduit le graphe de g suivant avec une tangente verticale en 0 et en 1 une tangente de pente 1.



(c) D'après le tableau de variation de g', la fonction g' est croissante strictement sur $\left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]$. Par conséquent, pour tout $x \in \left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]$, $g'\left(\mathrm{e}^{-3/2}\right) \leqslant g'(x) \leqslant g'\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = 0$. Donc en passant aux valeurs absolues, $|g(x)| \leqslant \left|g'\left(\mathrm{e}^{-3/2}\right)\right| = \left|-\frac{3}{2}+1\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Ce majorant est bien un maximum car il est atteint pour $x = \mathrm{e}^{-3/2}$. D'où,

$$\boxed{M = \sup_{x\in\left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]} |g'(x)| = \frac{1}{2}.}$$

On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]$ et pour tout entier naturel n

$$t_{n+1} = -g\left(t_n\right).$$

3. (a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ ». Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation.* Si $n = 0$, alors par définition $\mathrm{e}^{-3/2} \leqslant t_0 \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. Donc par décroissance de g sur $\left[0;\mathrm{e}^{-1}\right]$, on en déduit que $g\left(t_0\right) \geqslant g\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = -\mathrm{e}^{-1}$ et donc $t_1 = -g\left(t_0\right) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. De plus on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} t_0 \leqslant t_1 & \Leftrightarrow & t_0 \leqslant -g\left(t_0\right) = -t_0\ln\left(t_0\right) & \\ & \Leftrightarrow & t_0\left(1+\ln\left(t_0\right)\right) \leqslant 0 & \\ & \Leftrightarrow & 1+\ln\left(t_0\right) \leqslant 0 & \text{car } t_0 > 0 \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(t_0\right) \leqslant -1 & \\ & \Leftrightarrow & t_0 \leqslant \mathrm{e}^{-1}. & \end{array}$$

  La dernière assertion étant vraie par hypothèse, on en déduit que $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors $0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. Par croissance de la fonction $-g$ sur $\left[0;\mathrm{e}^{-1}\right]$, on en déduit que

$$-g(0) \leqslant -g\left(t_n\right) \leqslant -g\left(t_{n+1}\right) \leqslant -g\left(\mathrm{e}^{-1}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_{n+2} \leqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie.

- *Conclusion.* On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie et notamment

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}.}$$

(b) D'après la question précédente, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par e^{-1}. Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } l}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_{n+1} = -g(t_n)$. La suite $(t_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. De plus la fonction $-g$ est continue sur $\left[0; \mathrm{e}^{-1}\right]$ donc par la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$l = \lim_{n\to+\infty} t_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} -g(t_n) = -g\left(\lim_{n\to+\infty} t_n\right) = -g(l).$$

Donc $-l\ln(l) = l$. Or par croissance de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n \geqslant t_0 \geqslant \mathrm{e}^{-3/2}$ donc par passage à la limite, $l \geqslant \mathrm{e}^{-3/2} > 0$. Donc $l \neq 0$ et donc

$$-l\ln(l) = l \qquad \Rightarrow \qquad -\ln(l) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{l = \mathrm{e}^{-1}}.$$

4. (a) Soit $x \in \left[\mathrm{e}^{-3/2}; \mathrm{e}^{-1}\right]$. La fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\mathrm{e}^{-3/2}; \mathrm{e}^{-1}\right]$ donc par le théorème des accroissements finis,

$$\left|g(x) - g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| \leqslant \sup_{z\in\left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]} |g'(z)| \left|x - \mathrm{e}^{-1}\right|.$$

Donc d'après la question (2.c), on obtient

$$\boxed{\forall x \in \left[\mathrm{e}^{-3/2}; \mathrm{e}^{-1}\right], \qquad \left|g(x) - g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| \leqslant \frac{\left|x - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2}.}$$

(b) D'après la question (3.a), la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et croissante et l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{e}^{-3/2} \leqslant t_0 \leqslant t_n \leqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

Autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in \left[\mathrm{e}^{-3/2}; \mathrm{e}^{-1}\right]$. Donc par la question précédente,

$$\left|t_{n+1} - \mathrm{e}^{-1}\right| = \left|-g(t_n) + g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| = \left|g(t_n) - g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| \leqslant \frac{\left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2}.$$

Ainsi,

$$\left|t_{n+1} - \mathrm{e}^{-1}\right| \leqslant \frac{\left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2} \leqslant \frac{\left|t_{n-1} - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2^2} \leqslant \frac{\left|t_{n-2} - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2^3}.$$

Et par récurrence on trouve

$$\left|t_{n+1} - \mathrm{e}^{-1}\right| \leqslant \frac{\left|t_0 - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2^{n+1}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|t_0 - \mathrm{e}^{-1}\right|.}$$

(c) Par passage à la limite dans la question précédente, on obtient,

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right| \leqslant 0.$$

Donc par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right| = 0$ autrement dit on retrouve la limite de la suite :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} t_n = \mathrm{e}^{-1}.}$$

Partie III

Dans cette partie, on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(t) = \mathrm{e}^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction R_n est la différence de la fonction exponentielle et d'une fonction polynomiale. La fonction R_n est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ (et même $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$). De plus pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$R_n'(t) = \mathrm{e}^t - 0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{kt^{k-1}}{k!} = \mathrm{e}^t - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \mathrm{e}^t - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{(k)!} = \mathrm{e}^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^n}{n!} = R_n(t) + \frac{t^n}{n!}.$$

Par conséquent, on a bien

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad R_n'(t) - R_n(t) = \frac{t^n}{n!} \qquad (\mathcal{E})}$$

(b) L'équation sans $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$ est donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) - y(t) = 0 \qquad\qquad (\mathcal{E}_0).$$

C'est une équation différentielle du premier ordre avec $a : t \mapsto -1$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et donc admet des primitives dont l'une est donnée par $t \mapsto -t$. Par conséquent l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^t \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^t \end{array} \right).}$$

(c) Soient $y_0 : t \mapsto \mathrm{e}^t$, $z \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et y la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $y(t) = z(t) y_0(t)$. La fonction y est dérivable si et seulement si z est dérivable et alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) = z'(t) y_0(t) + z(t) y_0'(t).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) y_0(t) + z(t) y_0'(t) - z(t) y_0(t) = \frac{t^n}{n!} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) y_0(t) + z(t) \underbrace{(y_0'(t) - y_0(t))}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0} = \frac{t^n}{n!} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = \frac{1}{y_0(t)} \frac{t^n}{n!} = \mathrm{e}^{-t} \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \frac{t^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$ admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ dont $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-s} \frac{s^n}{n!}\,\mathrm{d}s$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-s} \frac{s^n}{n!}\,\mathrm{d}s + C \\ &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-s} \frac{s^n}{n!}\,\mathrm{d}s + C \right) y_0(t) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-s} \frac{s^n}{n!}\,\mathrm{d}s + C\,\mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-s} \frac{s^n}{n!}\,\mathrm{d}s + C\,\mathrm{e}^t \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1.a, R_n est solution de $(\mathcal{E})$. Donc d'après la question 1.c, $R_n \in \mathscr{S}$. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$R_n(t) = \mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-s} \frac{s^n}{n!}\,\mathrm{d}s + C\,\mathrm{e}^t$$

En particulier, $R_n(0) = 0 + C$. Or par définition, $R_n(0) = 1 - 1 + 0 = 0$. Donc, $C = 0$. Ainsi on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad R_n(t) = \mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-s} \frac{s^n}{n!}\,\mathrm{d}s.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $s \geqslant 0$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-s} \leqslant 1$. Donc pour tout $s \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-s} \frac{s^n}{n!} \leqslant \frac{s^n}{n!}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, on a pour tout $t \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \int_0^t \mathrm{e}^{-s} \frac{s^n}{n!}\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \frac{s^n}{n!}\,\mathrm{d}s = \left[\frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{s=0}^{s=t} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \qquad\qquad \text{car } n+1 \geqslant 1.$$

Or pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^t \geqslant 0$. Donc on ne change pas le sens de l'inégalité en multipliant par e^t :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-s}\,\frac{s^n}{n!} = R_n(t)\,\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{e}^t\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La fonction R_n est donc positive sur $\mathbb{R}_+$ et donc pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{|R_n(t)| = R_n(t) \leqslant \mathrm{e}^t\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.}$$

3. Dans cette question, on fixe $t \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_n = \frac{t^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Puisque $t > 0$, on en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{t^n} = \frac{t}{n+1}.$$

   Ainsi pour tout $n \geqslant \lfloor t \rfloor$, on a $n+1 \geqslant \lfloor t \rfloor + 1 \geqslant t$ et donc $\frac{t}{n+1} \leqslant 1$. Donc pour tout $n \geqslant n_0 = \lfloor t \rfloor$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$. $\boxed{\text{Donc la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante à partir du rang } n_0 = \lfloor t \rfloor.}$
   (b) De la question précédente, on en déduit que pour tout $n \geqslant n_0 = \lfloor t \rfloor$, $a_n \leqslant a_{n_0}$ et donc $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée par } M = \max\{a_0, \dots, a_{n_0}\}.}$
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{t}{(n+1)}a_n$. Donc d'après la question précédente, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$0 \leqslant a_{n+1} \leqslant \frac{t}{(n+1)}M.$$

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t}{(n+1)}M = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$ i.e. que $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

4. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. D'après la question précédente, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et donc

   $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^t\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

   Or d'après la question (2.), on a $|R_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^t\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$. Donc par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(t) = 0$. Par définition de $R_n(t)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e}^t - \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right) = 0$. La **suite** $(\mathrm{e}^t)_{n\in\mathbb{N}}$ étant constante, on en déduit que

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} = \mathrm{e}^t.}$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}\frac{1}{n!}.$$

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} > u_n.$$

Par conséquent $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$ D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= u_n + \frac{1}{n}\frac{1}{n!} - u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n(n!)} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n(n+1) - n}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)((n+1)!)} > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$

6. On a déjà vu dans la question précédente que les deux suites étaient de monotonie opposée. Il nous reste donc à montrer que la différence converge vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par définition de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}\frac{1}{n!}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{n!} = 0.$$

$\boxed{\text{Conclusion, les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}}$

7. De la question précédente, on en déduit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une limite commune ℓ. Or d'après la question 4., pour $t = 1$, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}\,.$$

On en déduit alors que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}\,.$$

De plus, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_q < \lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}\,.$$

De même puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_q > \lim_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}\,.$$

$$\boxed{\text{Conclusion, pour tout } q \in \mathbb{N}^*, \quad u_q < \mathrm{e} < v_q.}$$

8. On souhaite montrer dans cette question que e est irrationnel. A cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q, premiers entre eux, tels que

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q}.$$

(a) On a

$$u_q q! = \left(\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right) q! = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^{q-1} \underbrace{(k+1)(k+2)\dots q}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{1}_{\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{\text{En tant que somme d'entiers naturels, } u_q q! \in \mathbb{N} \text{ est bien un entier naturel.}}$

(b) Puisque l'on a supposé $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, de la question 7., on déduit que

$$u_q < \frac{p}{q} < v_q \qquad \Leftrightarrow \qquad u_q q! < p\,(q-1)! < v_q q!.$$

Or

$$v_q q! = u_q q! + \frac{1}{q}\frac{1}{q!}q! = u_q q! + \frac{1}{q} \leqslant u_q q! + 1.$$

Par conséquent $p\,(q-1)!$ est un entier strictement compris entre l'entier $r = u_q q!$ et l'entier $r+1$ ce qui est naturellement impossible. Donc e ne peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers et n'est donc pas rationnel. $\boxed{\text{Le réel e est irrationnel.}}$

9. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(a) Soit ε un réel strictement positif. On a vu précédemment que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$. Donc par définition de la limite, puisque $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\boxed{\forall n \geqslant n_1, \qquad |u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.}$$

L'entier n_1 étant fixé, la somme $\sum_{k=1}^{n_1}(u_k - \mathrm{e}) = M_{n_1}$ est un réel fixé qui ne dépend pas de la variable n et donc la suite

$$\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_1}(u_k - \mathrm{e})\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{|M_{n_1}|}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge vers 0. Donc par définition de la limite, comme $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant m$,

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_1}(u_k - \mathrm{e})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En prenant $n_2 = \max(n_1, m)$, on a bien $n_2 \geqslant n_1$ et pour tout $n \geqslant n_2$, $n \geqslant m$ et donc

$$\boxed{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_1}(u_k - \mathrm{e})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.}$$

(b) Soit $n > n_2$. On a

$$|w_n - \mathrm{e}| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \mathrm{e})\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1}(u_k - \mathrm{e}) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n}(u_k - \mathrm{e})\right|$$

où la dernière expression est possible car $n > n_2 \geqslant n_1$. Donc par l'inégalité triangulaire,

$$|w_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_1}(u_k - \mathrm{e})\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{k=n_1+1}^{n}(u_k - \mathrm{e})\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_1}(u_k - \mathrm{e})\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n}|u_k - \mathrm{e}|.$$

D'après la question précédente, pour tout $k \geqslant n_1 + 1 \geqslant n_1$, $|u_k - \mathrm{e}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et comme $n \geqslant n_2$, on a aussi $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_1}(u_k - \mathrm{e})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent,

$$|w_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n}\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{n-n_1}{n}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(1+1) = \varepsilon.$$

Conclusion pour tout $n > n_2$,

$$|w_n - \mathrm{e}| \leqslant \varepsilon.$$

(c) On a donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $|w_n - \mathrm{e}| \leqslant \varepsilon$ ce qui correspond à la définition de la limite. Par conséquent, $\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers e.}}$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$e_n = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$. Donc en posant $u = -\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc

$$-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par suite,

$$e_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Or $\mathrm{e}^v \underset{v\to 0}{=} 1 + v + \frac{v^2}{2} + o\left(v^2\right)$. Posons $v = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors

$$\begin{aligned} v &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ v^2 &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e_n &\underset{n\to+\infty}{=} \begin{array}{llll} \mathrm{e}(1 & +\frac{1}{2n} & +\frac{1}{3n^2} & +o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ & & +\frac{1}{8n^2} & +o\left(\frac{1}{n^2}\right)) \end{array} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e\left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ & \boxed{e_n \underset{n\to+\infty}{=} e + \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).} \end{aligned}$$

En particulier $e_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}$ et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} e_n = \mathrm{e}}$.