Épreuve de Mathématiques 7

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 — Projecteur d'un espace vectoriel

Définition. On appelle projecteur d'un espace vectoriel E tout endomorphisme f de E vérifiant :

$$f^2 = f$$

Le but de cet exercice est d'observer, puis d'établir des résultats remarquables sur les projecteurs.

Les parties I et II sont en grande partie indépendantes.

Partie I - Exemple d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$

On considère l'application p et l'ensemble F suivants :

$$p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} -x-2y+2z \\ x+2y-z \\ z \end{bmatrix} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad F = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; p(u) = u \right\}$$

On note classiquement $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$, puis préciser sa dimension. L'application p est-elle injective ?
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(p)$, puis préciser sa dimension. L'application p est-elle surjective ?
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que $F = \mathrm{Im}(p)$.
7. (a) Calculer $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$.
   (b) Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Partie II - Deux résultats généraux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un projecteur de E.

8. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
   (b) Est-ce compatible avec la partie I ? *Justifier avec soin.*
9. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f)$.
   (b) Est-ce compatible avec la partie I ? *Justifier avec soin.*

Problème 2 — Des cas particuliers du lemme des noyaux

Soit E un espace vectoriel réel quelconque, et f un endomorphisme de E.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes, mais peuvent utiliser le préliminaire.

Préliminaire

1. Montrer que :
$$\forall (g,h) \in \mathscr{L}(E)^2, \qquad g \circ h = 0_{\mathscr{L}(E)} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(g) \tag{$\bigstar$}$$

Partie I - Pour un polynôme de degré 2 (D'après Banque PT 2018)

2. (a) Soit $u \in E$. Déterminer des réels λ et μ tels que :
$$u = \lambda\Big[f(u) - 2u\Big] + \mu\Big[f(u) - u\Big]$$
   (b) En déduire que $E = \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais et dans cette partie I uniquement que :
$$f^2 = 3f - 2\mathrm{Id}_E$$

3. À l'aide du préliminaire, montrer que :
$$\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$$
4. En déduire que :
$$E = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$$
5. On suppose dans cette question que E est de dimension finie.
Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :
$$\forall u \in \mathscr{B}, \ f(u) \text{ et } u \text{ sont colinéaires}$$

Partie II - Pour un polynôme de degré 3 (D'après Banque PT 2014)

6. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

On suppose désormais et dans cette partie II uniquement que :
$$f^3 = \mathrm{Id}_E$$

7. Soit $u \in E$. On pose :
$$v = \frac{1}{3}(2u - f^2(u) - f(u)) \qquad \text{et} \qquad w = \frac{1}{3}(f^2(u) + f(u) + u)$$
   (a) Calculer $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(v)$ et $(f - \mathrm{Id}_E)(w)$.
   (b) Vérifier que $u = v + w$. Quelle inclusion ensembliste a-t-on montrée ? *Justifier avec soin.*
8. Déduire des questions précédentes que :
$$E = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$$

Problème 3 — Étude d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)\mathcal{I}_n$$

Partie I - Généralités

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Simplifier $(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)(M)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $M \in \mathrm{Ker} f$. Calculer $\mathrm{Tr}(M)$, puis en déduire si f est injective.

Partie II - Étude du cas particulier $n = 2$

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$.

4. Rappeler la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis calculer $f(\mathscr{B})$.
5. Déterminer une base $\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}$ du noyau de la trace, puis préciser sa dimension.
6. En déduire que $\mathrm{Ker(Tr)} \oplus \mathrm{Vect}(\mathcal{I}_2) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
7. En déduire une base $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathscr{B}',\ f(M) \text{ et } M \text{ sont colinéaires}$$

Partie III - Étude du cas général n quelconque

Dans cette partie, n désigne à nouveau un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque.

8. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On constate alors que la matrice M se décompose de la manière suivante :

$$M = \left(M - \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n}\mathcal{I}_n\right) + \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n}\mathcal{I}_n \qquad (\bigstar)$$

   (a) Montrer que $\mathrm{Ker(Tr)} \cap \mathrm{Vect}(\mathcal{I}_n) = \{\mathcal{O}_n\}$.

   (b) i. Calculer $\mathrm{Tr}\left(M - \dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{n}\mathcal{I}_n\right)$.

   ii. Quelle relation ensembliste peut-on alors déduire de $(\bigstar)$?

   (c) En déduire avec soin que $\mathrm{Ker(Tr)} \oplus \mathrm{Vect}(\mathcal{I}_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Montrer les égalités suivantes :

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker(Tr)} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(\mathcal{I}_n)$$

Problème 4 — Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Les parties I et II sont totalement indépendantes. La partie III dépend des parties I et II.

Partie I - Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ et l'application f suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X^2+1)P(1) + P(X) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. On pose $P_1 = 1$, $P_2 = X - 1$, $P_3 = X^2 - 2$ et $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Calculer $f(P_1)$, $f(P_2)$ et $f(P_3)$.
   (c) En déduire l'image de f.
4. L'application f est-elle un automorphisme de E ? *Justifier avec soin.*

Partie II - Détermination d'itérées

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel quelconque et u un endomorphisme de E.
On suppose que u vérifie :

$$u^2 - 4u + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad (\bigstar)$$

Enfin, on pose :

$$g = \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}u \qquad \text{et} \qquad h = \mathrm{Id}_E - g$$

5. Montrer que u est bijective et préciser u^{-1}.
6. Calculer g^2, puis en déduire $g \circ h$, $h \circ g$ et h^2.
7. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \alpha g + \beta h$.
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n = \alpha^n g + \beta^n h$.

Partie III - Étude des itérées de f

9. Montrer que l'endomorphisme f vérifie la condition $(\bigstar)$.

On reprend désormais les notations et résultats établis en partie II avec $u = f$.

10. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, donner une expression de $g(P)$ et $h(P)$ en fonction de P et $P(1)$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, une expression de $f^n(P)$ en fonction de P et de $P(1)$.
12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $f^n(P_1)$, $f^n(P_2)$ et $f^n(P_3)$.

Fin de l'épreuve