Épreuve de Mathématiques 9
2018-2019

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Exercice 1 - Algèbre linéaire

Le but de cet exercice est d'illustrer l'utilisation de l'algèbre linéaire pour répondre à une problématique matricielle bien connue : le calcul des puissances successives d'une matrice.
On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}_3[X]$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$g(P) = (1 + X^2)P'' - 2XP'.$$

1. Expliciter $f(P)$ pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ et montrer que $f = g$.
2. L'endomorphisme f est-il l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A ?
   Si oui, justifier avec soin. Si non, préciser l'application linéaire canoniquement associée à A.
3. (a) Déterminer Ker$A$ et ImA.
   (b) En déduire une base $\mathscr{B}_1$ de Ker$f$ et une base $\mathscr{B}_2$ de Imf.
4. Montrer que la famille $\mathscr{B}'$, obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Que peut-on en déduire sur Ker$f$ et Imf ?
5. Montrer que $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) = \text{Im}f$.
6. En déduire la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}'$.
7. Déterminer une matrice $Q \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$.
8. En déduire A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On demande le calcul explicite des coefficients de A^n.

Exercice 2 - Intégration

On considère la fonction f définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que f est définie est définie sur $]0;+\infty[$ et déterminer son signe.
2. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u.$$
3. (a) Justifier soigneusement que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$,
$$f'(x) + f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x}.$$
4. Montrer d'autre part que pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x} + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$
5. En déduire pour tout $x > 0$ une expression de $f'(x)$ sous la forme $\int_0^1 \alpha(x,t)\,\mathrm{d}t$ où $\alpha(x,t)$ est une expression en fonction de x et de t que l'on précisera.
6. (a) Déterminer la monotonie de f.
   (b) Justifier que f possède une limite finie en $+\infty$ (on ne cherchera pas à la calculer dans cette question).
7. (a) Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\frac{\mathrm{e}-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{x}.$$
   (b) En déduire soigneusement un équivalent de f en $+\infty$.
8. On définit pour tout $x > 0$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t+x}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier qu'il existe $M > 0$ (à déterminer) telle que
$$\forall t \in [0;1], \quad 0 \leqslant \mathrm{e}^t - 1 \leqslant Mt.$$
   (b) En déduire que g est une fonction bornée sur $]0;+\infty[$.
9. Montrer alors que pour tout $x > 0$,
$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant M + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$
10. En déduire un équivalent <u>simple</u> de f en 0^+.

Exercice 3 - Probabilités (d'après Banque PT 2018, sujet A)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ deux entiers. On possède n boules numérotées de 1 à n que l'on range de façon aléatoire, équiprobable dans N cases, numérotées de 1 à N. Il est possible de ranger autant de boules que désiré dans une case et l'on suppose que le rangement d'une boule est indépendant du rangement des autres boules.

- Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;N]\!]$, on définit l'évènement

$$A_{i,j} \quad : \quad \text{« la boule } i \text{ est rangée dans la case } j \text{ ».}$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'évènement

$$T_k \quad : \quad \text{« } k \text{ cases exactement contiennent au moins une boule ».}$$

1. Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;N]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(A_{i,j})$.
2. Justifier que pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;N]\!]$, $(k,l) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;N]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{k,l}) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{si } i = k,\ j \neq l \\ \frac{1}{N^2} & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

3. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$, l'évènement T_k est-il non négligeable ?
   On distinguera les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.
4. On suppose dans cette question que $n = 1$. Que vaut $\mathbb{P}(T_1)$?
5. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $N \geqslant 2$.
   (a) Exprimer T_1 à l'aide des évènements $(A_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;2]\!] \times [\![1;N]\!]}$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(T_1)$.
   (c) En déduire $\mathbb{P}(T_2)$.
6. On suppose $n \in [\![1;N]\!]$. On pose Ω l'ensemble des rangements possibles des n boules dans les N cases.
   (a) Calculer **le cardinal** de Ω.
   (b) Calculer le cardinal de $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des rangements où chaque case contient au plus une seule boule.
   (c) En déduire $\mathbb{P}(T_n)$.
7. On suppose $n \in [\![1;N]\!]$ et on fixe $k \in [\![1;n-1]\!]$. Après avoir compté le nombre de cases contenant au moins une boule après les n premiers rangements, on range une $n+1^{\text{ieme}}$ boule et l'on définit

$$S : \text{« } k+1 \text{ cases exactement contiennent au moins une boule après les } n+1 \text{ rangements ».}$$

   Montrer proprement que

$$\mathbb{P}(S) = \frac{N-k}{N}\mathbb{P}(T_k) + \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_{k+1}).$$

Exercice 4 - Algèbre linéaire, endomorphismes cycliques

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

> Un endomorphisme u est dit cyclique s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que :
>
> $$E = \mathrm{Vect}(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{n-1}(x))$$

Les deux parties sont totalement indépendantes.

Partie I - Étude d'un exemple (D'après Centrale TSI 2014)

Dans cette partie seulement, $n = 2$ et $E = \mathbb{R}_1[X]$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ est la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

On pose $P = 2 + 3X$.

1. Déterminer $f(P)$, puis en déduire que f est cyclique.
2. Déterminer $f^2(P)$, puis ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}' = (P, f(P))$.
3. En déduire la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}'$.
4. (a) Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
   (b) En déduire si f est un automorphisme de E.

Partie II - Polynôme annulateur (D'après Banque PT 2015)

On rappelle que cette partie est totalement indépendante de la partie I.
Soit f un endomorphisme de E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

5. (a) Rappeler la dimension de $\mathscr{L}(E)$.
   (b) Justifier avec soin que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{n^2})$ est liée.
   (c) En déduire qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n^2}[X]$ non nul tel que $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
6. On suppose désormais que f est cyclique.
   On sait alors qu'il existe $x \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x))$.
   (a) Justifier que la famille $\mathscr{B} = (x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
   (b) En notant $a_0, \cdots, a_{n-1}$ les coordonnées de $f^n(x)$ dans la base $\mathscr{B}$, déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (c) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ est libre.
   (d) i. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

   $$f^{n+k}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{j+k}(x)$$

   ii. En déduire que $f^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j$.

FIN DE L'ÉPREUVE