Correction de l'exercice 2 TD19 (applications linéaires)

Enoncé Soit $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$. Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.
Correction Il est clair que si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors f' et f'' existe et sont dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc $f''-3f'+2f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et donc φ est bien définie.
Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f,g) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)'' - 3(\lambda f + \mu g)' + 2(\lambda f + \mu g) \\
&= \lambda f'' + \mu g'' - 3\lambda f' - 3\mu g' + 2\lambda f + 2\mu g \qquad \text{par linéarité de la dérivation} \\
&= \lambda (f'' - 3f' + 2f) + \mu (g'' - 3g' + 2g) \\
&= \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g).
\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire. Donc $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$.
Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a :

$$f \in \text{Ker}\,(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'' - 3f' + 2f = 0 \qquad (E)$$

Déterminer le noyau de φ revient donc à résoudre l'équation différentielle (E) linéaire du second ordre à coefficients constants. Soit (E_c) : $r^2 - 3r + 2 = 0$ l'équation caractéristique associé d'inconnu $r \in \mathbb{C}$. Son discriminant est donné par $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$. Donc les racines de (E_c) sont $\frac{3-1}{2} = 1$ et $\frac{3+1}{2} = 2$. Ainsi l'ensemble des solutions de (E) et donc le noyau de φ est donné par

$$\text{Ker}\,(\varphi) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\,e^x + B\,e^{2x} \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2x} \end{array} \right)$$

et notamment Ker (φ) est de dimension 2.

Correction de l'exercice 3 TD19 (applications linéaires)

Enoncé Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Montrer que

1. $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}\,(f) = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Ker}\,(f) = \text{Ker}\,(f^2)$
2. $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad E = \text{Im}(f) + \text{Ker}\,(f)$

Correction

1. • On suppose que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}\,(f) = \{0_E\}$. Montrons que $\text{Ker}\,(f) = \text{Ker}\,(f^2)$. Commençons par montré que $\text{Ker}\,(f) \subseteq \text{Ker}\,(f^2)$, ce qui est vrai pour tout endomorphisme. Soit $x \in \text{Ker}\,(f)$. Alors par définition $f(x) = 0_E$. Donc par composition par f, $f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ car f est linéaire. Donc $f^2(x) = 0$ et $x \in \text{Ker}\,(f^2)$. Ce qui montre bien que
$$\text{Ker}\,(f) \subseteq \text{Ker}\,(f^2).$$
Montrons maintenant que $\text{Ker}\,(f^2) \subseteq \text{Ker}\,(f)$. Soit $x \in \text{Ker}\,(f^2)$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = 0_E$. Donc $f(x) \in \text{Ker}\,(f)$. Or on note également que $f(x) \in \text{Im}\,(f)$ et donc $f(x) = \text{Ker}\,(f) \cap \text{Im}\,(f)$. Or par hypothèse $\text{Ker}\,(f) \cap \text{Im}\,(f) = \{0_E\}$. Donc $f(x) = 0_E$ et ainsi $x \in Ker\,(f)$. On a donc aussi montré que
$$\text{Ker}\,(f^2) \subseteq \text{Ker}\,(f).$$
Conclusion,
$$\text{Ker}\,(f^2) = \text{Ker}\,(f).$$
• On suppose maintenant que $\text{Ker}\,(f^2) = \text{Ker}\,(f)$ et on veut montrer que $\text{Ker}\,(f) \cap \text{Im}\,(f) = \{0_E\}$. Soit $x \in \text{Ker}\,(f) \cap \text{Im}\,(f) = \{0_E\}$. D'une part, puisque $x \in \text{Ker}\,(f)$, on a $f(x) = 0_E$. D'autre part, puisque $x \in \text{Im}\,(f)$ alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. En composant par f, on obtient que $f^2(y) = f(x) = 0$. Donc $y \in \text{Ker}\,(f^2)$. Or $\text{Ker}\,(f^2) = \text{Ker}\,(f)$ par hypothèse. Donc $y \in \text{Ker}\,(f)$. Alors $x = f(y) = 0$. Ainsi, $\text{Ker}\,(f) \cap \text{Im}\,(f) \subseteq \{0_E\}$. L'inclusion réciproque étant vraie (en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels), on en déduit que
$$\text{Ker}\,(f) \cap \text{Im}\,(f) = \{0_E\}$$
2. • On suppose que $\text{Im}\,(f) = \text{Im}\,(f^2)$. Montrons que $E = \text{Ker}\,(f) + \text{Im}\,(f)$. Soit $x \in E$. On sait que $f(x) \in \text{Im}\,(f)$ et $\text{Im}\,(f) = \text{Im}\,(f^2)$ par hypothèse. Donc $f(x) \in \text{Im}\,(f^2)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$.

Surtout on ne simplifie pas gratuitement par f ni ne compose par f^{-1} qui n'existe probablement pas ! Mais de l'égalité précédente, on en déduit que

$$f\left(x-f(y)\right)=0 \qquad \text{par linéarité de } f.$$

Donc $x-f(y)\in \operatorname{Ker}(f)$. Ainsi on peut écrire que

$$x=\underbrace{x-f(y)}_{\in \operatorname{Ker}(f)}+\underbrace{f(y)}_{\in \operatorname{Im}(f)} \in \operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Im}(f).$$

Donc $E \subseteq \operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Im}(f)$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie, on a

$$E=\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Im}(f).$$

- Réciproquement, on suppose que $E=\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Im}(f)$ et on va montrer que $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Im}\left(f^2\right)$. Commençons par montrer que $\operatorname{Im}\left(f^2\right)\subseteq \operatorname{Im}(f)$ qui est toujours vraie pour tout endomorphisme. Soit $x\in \operatorname{Im}\left(f^2\right)$, alors il existe $x\in E$ tel que $x=f^2(y)$. Donc $x=f\left(f(y)\right)$. Donc x est l'image de $f(y)$ par f ou encore x admet $f(y)$ pour antécédent par f. Donc x admet (au moins) un antécédent par f i.e. $x\in Im(f)$. Ainsi,

$$\operatorname{Im}\left(f^2\right)\subseteq \operatorname{Im}(f).$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x\in \operatorname{Im}(f)$. Alors il existe $y\in E$ tel que $x=f(y)$. Or $E=\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Im}(f)$. Donc il existe $y_1\in \operatorname{Ker}(f)$ et $y_2\in \operatorname{Im}(f)$ tels que $y=y_1+y_2$. En composant par f on obtient que $x=f(y)=f(y_1)+f(y_2)$. Or $y_1\in \operatorname{Ker}(f)$ donc $f(y_1)=0_E$ et donc $x=f(y_2)$. Or $y_2\in \operatorname{Im}(f)$. Donc il existe $z\in E$ tel que $y_2=f(z)$ et finalement $x=f(y_2)=f^2(z)$. Donc $\operatorname{Im}(f)\subseteq \operatorname{Im}\left(f^2\right)$ et par ce qui précède, on conclut que

$$\operatorname{Im}\left(f^2\right)=\operatorname{Im}(f).$$