Interrogation 10 d'entrainement
Ensembles, matrices, ...

1. **Savoir manipuler les ensembles.** Exercice 1 du TD12.
2. **Savoir manipuler les indicatrices.** Exercice 9 du TD12.
3. **Savoir calculer le rang d'une matrice.** Déterminer le rang des matrices de l'exercice 7 du TD11.
4. **Calculer une matrice élémentaire.** Déterminer chacune des matrices élémentaires suivantes.
   1. Dans $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$, $U_{13}(2)$. Puis calculer $AU_{13}(2)$ et $U_{13}(2)A$ pour $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & 4 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 2 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   2. Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, T_{32}. Puis calculer $T_{32}A$ et AT_{32} pour $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 5 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.
   3. Dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, $D_3(-5)$. Puis calculer $AD_3(-5)$ et $D_3(-5)A$ pour $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
5. **Savoir manipuler union et intersection d'image et d'image réciproque.** Démontrer les assertions des Popositions II.11 et II.12 du chapitre 12.
   1. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
   2. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
   3. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   4. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   5. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   6. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   7. $f^{-1}(C_F(B)) = C_E(f^{-1}(B))$.
6. **Savoir calculer une limite.** Calculer les limites suivantes.
   1. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\arctan(\ln(x))}{x-1}$.
   2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^5 (\mathrm{ch}(3x) - \mathrm{sh}(3x))$.
   3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+3}{2x^2+1}\right)}{x}$.
7. **Savoir faire un changement de variable.** Exercice 8 du TD8.
8. **Bonus : surprise du chef!**

Question 1 et 2. Correction en classe le lundi 17/12.
Question 3.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a,

$$A \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_1 \end{matrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftrightarrow L_5 \end{matrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

On obtient une matrice échelonnée en ligne avec quatre pivots. Donc $\mathrm{rg}(A) = 4$. Notamment la matrice A n'est pas inversible (car $\mathrm{rg}(A) < 5$).
La matrice B a été traitée en classe.
Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a

$$C \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_1 \\ L_6 \leftarrow L_6 - L_1 \end{matrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_6 \leftarrow L_6 + L_2 \end{matrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_4 \quad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_3 \\ L_6 \leftarrow L_6 - L_3 \end{matrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_5 \leftarrow L_5 - 6L_4$$

On obtient une matrice échelonnée en ligne avec quatre pivots. Donc $\mathrm{rg}(C) = 4$. En particulier la matrice C n'est pas inversible... Oui bon elle n'est pas carrée alors forcément elle n'est pas inversible.

Soit $D = \begin{pmatrix} i & i & i & i & i & i \\ 1-i & 1 & 1-i & 1 & 1-i & 1 \\ 2i & 1 & 2 & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$. On a,

$$D \underset{\mathscr{C}}{\sim} \begin{pmatrix} i & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 1 & 2(1-i) & -2 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_1 \\ C_6 \leftarrow C_6 - C_2 \end{array}$$

$$\underset{\mathscr{C}}{\sim} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-i & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 1-2i & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow \frac{1}{2(1-i)} C_3 \\ C_4 \leftarrow \frac{-1}{2} C_4 \\ C_5 \leftarrow \frac{-1}{2} C_5 \end{array}$$

$$\underset{\mathscr{C}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-i & \boxed{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 1-2i & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_3 \end{array}$$

On obtient une matrice échelonnée en colonne avec trois pivots. On en déduit que $\mathrm{rg}(D) = 3$.

Question 4.

1. La matrice de transvection $U_{13}(2)$ correspond à l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$ ou encore à l'opération $C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1$ (attention à l'inversion des indices quand on opère sur les colonnes). Pour la déterminer on applique cette opération à I_5 (car $n = 5$) :

$$U_{13}(2) = U_{13}(2) I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effectuant cette opération sur les lignes de A, respectivement sur les colonnes, on obtient :

$$U_{13}(2)A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 12 & 8 & 7 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 2 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{respectivement} \quad AU_{13}(2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 14 & 4 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 8 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 12 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 10 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de permutation T_{32} correspond à l'échange de la ligne 2 et 3 ou à l'échange de la colonne 2 et 3 :

$$I_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_{13}A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 0 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AT_{13} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La matrice de dilatation $D_3(-5)$ correspond à l'opération $L_3 \leftarrow -5L_3$ ou $C_3 \leftarrow -5C_3$:

$$D_3(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_3(-5)A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 15 & 15 & 25 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AD_3(-5) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 15 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Question 6.

1. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\arctan(\ln(x))}{x-1} = 1.$
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^5 (\mathrm{ch}(3x) - \mathrm{sh}(3x)) = 0.$
3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+3}{2x^2+1}\right)}{x} = 0.$

Question 7.

1. En posant $s = \sqrt{t}$, on obtient que F est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ F(x) = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C$.
2. Fixons $I =]0; \mathrm{e}^{-1}[$ ou $I =]0; \mathrm{e}^{-1}[$. En posant $s = \ln(t)$, on obtient que F est une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x + x\ln^2(x)}$ sur I si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ F(x) = \ln(x) - \ln\left(|1 + \ln(x)|\right) + C$.
3. En posant $s = \mathrm{e}^t$, on obtient que F est une primitive de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{e}^x - \ln\left(1 + \mathrm{e}^x\right) + C$.
4. A vous la suite !