Interrogation 11 d'entrainement
Ensembles, analyse asymptotique, ...

1. **Savoir manipuler les images réciproques.** Pour les fonctions f et les ensembles A suivants, déterminer $f^{-1}(A)$.
   1. $f : x \mapsto x^2 + 4x + 9$ et $A = [4; 14]$ *(on veillera à mettre f sous forme canonique).*
   2. $f : x \mapsto \arccos(\sin(x))$ et $A = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.
   3. $f : x \mapsto a^x$ et $A = [-5; 5]$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
2. **Savoir définir une relation d'équivalence.** Démontrer dans chacun des cas que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.
   2. Sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z') > 0$.
   3. Sur $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$.
3. **Comparaison asymptotique.** Dans chaque cas, comparer en justifiant le comportement asymptotique des suites dont on donne le terme général.
   1. $\ln(1 + \mathrm{e}^{-n})$ et $\frac{3n+5}{1+\sqrt{n}}$.
   2. $\arctan\left(\frac{3}{n^3}\right)$ et $\left(\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   3. 5^{-n} et n^{-5}.
4. **Savoir déterminer un équivalent.** Dans chaque cas, déterminer un équivalent le plus simple possible (cf exercice 2 TD13).
   1. $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
   2. $u_n = \frac{n! + \mathrm{e}^n}{2^n + 3^n}$
   3. $u_n = \ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)$
   4. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n^2-n+1}}$
   5. $u_n = \frac{2n^3 - \ln(n) + 1}{n^2+1}$
5. **Savoir réciter un développement limité usuel.** Enoncer le développement limité en 0 à l'ordre ... de la fonction .... Cf partie III.3 du cours.
6. **Calcul dans $\mathbb{R}$.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inégalités suivantes.
   1. $|3x - 12| \leqslant |7x + 2|$.
   2. $x + 3 \leqslant \sqrt{x+5}$.
   3. $\sqrt{x^2+4} \leqslant 8 - x$.
7. **Savoir intégrer une fraction rationnelle.** Déterminer les primitives des fonctions suivantes.
   1. $x \mapsto \frac{x+2}{x^2 - x + \frac{5}{4}}$ sur $\mathbb{R}$.
   2. $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-2x+1}$ sur $I =]1; +\infty[$ ou $I =]-\infty; 1[$.
      On pourra décomposer la fonction de la façon suivante $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$.
   3. $x \mapsto \frac{x+7}{x^2-4x+8}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit Δ le discriminant du polynôme $x^2 - x + \frac{5}{4}$. On a $\Delta = 1 - 4 \times \frac{5}{4} = -4 < 0$. Donc la fonction $f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2-x+\frac{5}{4}}$ est définie et même continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On commence par faire apparaitre du $\frac{u'}{u}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x + \frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2 - x + \frac{5}{4}} + \frac{\frac{1}{2}+2}{x^2 - x + \frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2 - x + \frac{5}{4}} + \frac{5}{2}\frac{1}{x^2 - x + \frac{5}{4}}.$$
Dans la seconde fraction, on fait apparaitre la forme canonique du dénominateur pour dégager la dérivée d'arctangente :
$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2 - x + \frac{5}{4}} + \frac{5}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2 - x + \frac{5}{4}} + \frac{5}{2}\frac{1}{1+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$
On reconnait alors directement dans la seconde fraction la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Ainsi,
$$\boxed{F \text{ est une primitive de } f \;\Leftrightarrow\; \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - x + \frac{5}{4}\right) + \frac{5}{2}\arctan\left(x - \frac{1}{2}\right) + C,}$$
car on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + \frac{5}{4} > 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \;\Leftrightarrow x = 1$. Donc la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-2x+1}$ est continue sur $I =]1; +\infty[$ (intervalle de $\mathbb{R}$) et admet donc des primitives sur I. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in I$, on a
$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{a(x-1)+b}{(x-1)^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{ax+b-a}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$
Par conséquent, on note que si $a = 2$ et $b - a = 1$ i.e. $b = 3$, alors l'égalité ci-dessus est vérifiée. Donc pour tout $x \in I$,
$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned} F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \;&\Leftrightarrow\; \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ F(x) = 2\ln(|x-1|) - \frac{3}{x-1} + C. \\ &\boxed{\Leftrightarrow\; \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ F(x) = \ln\left((x-1)^2\right) - \frac{3}{x-1} + C} \end{aligned}$$
Exactement de la même façon, on obtient le même résultat sur $J =]-\infty; 1[$ (car alors $(x-1)^2$ est toujours strictement positif et donc le $\ln\left((x-1)^2\right)$ existe toujours).

3. Soit Δ le discriminant de $x^2 - 4x + 8$. On a $\Delta = 16 - 4 \times 8 = -16 < 0$. Donc la fonction $f : x \mapsto \frac{x+7}{x^2-4x+8}$ est définie et même continue sur $\mathbb{R}$. On commence par faire apparaître du u'/u. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+8} + \frac{2+7}{x^2-4x+8}.$$
On met la seconde fraction sous forme canonique,
$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+8} + \frac{9}{(x-2)^2 - 4 + 8} = \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+8} + \frac{9}{(x-2)^2 + 4}.$$
On factorise par 4 dans le dénominateur,
$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+8} + \frac{9}{4}\frac{1}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 1}.$$
On fait alors apparaitre la dérivée d'arctangente :
$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+8} + \frac{9}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x-2}{2}\right)^2}.$$
Ainsi,
$$\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 4x + 8\right) - \frac{9}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + C.}$$