Interrogation 12 d'entrainement
Analyse asymptotique, fonctions usuelles

1. **Connaître les graphes usuelles.** Tracer les graphes des fonctions sin, cos, tan, arccos, arcsin, arctan, sh, ch. On fera apparaitre les tangentes usuelles.
2. **Réciter un développement limité.**
   1. Enoncer le développement limité de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ en 5 (et non en 0) à l'ordre 3.
   2. Enoncer le développement limité de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x^2)$ en 0 à l'ordre 4.
   3. Enoncer le développement limité de la fonction $x \mapsto (1+x)^{-2}$ en 0 à l'ordre 2.
   4. Enoncer le développement limité de la fonction $x \mapsto 2x\,\mathrm{sh}(x)$ en 0 à l'ordre 6.
   5. Enoncer le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ en 0 à l'ordre 6.
3. **Manipulation des fonctions usuelles.** Calculer ou simplifier chacune des expressions suivantes.
   1. $\tan\left(\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
   2. $\arctan(\tan(x))$ pour $x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$
   3. $\arcsin\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
   4. $\cos(2\arcsin(x))$ pour $x \in [-1;1]$
   5. $8^{\log_2(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$
4. **Manipulation du petit *o*.** Simplifier au maximum les expressions suivantes.
   1. $o\left(x^4\right) + x^2 + 3o\left(x^8\right) \underset{x\to 0}{=}$
   2. $8o\left(x^4\right) o(x)\, x^2 \underset{x\to 0}{=}$
   3. $9x + o\left(x^3\right) + 1008\sqrt{x} + o\left(\ln^5(x)\right) \underset{x\to+\infty}{=}$
   4. $\sqrt{x}o\left(x^3\right) + o\left(\ln(x^4)\right) x^2 - o\left(x^2\right) o\left(x^5\right) \underset{x\to+\infty}{=}$
   5. $n^3 + o\left(\frac{1}{n}\right) n^6 + o\left(n^3 + o\left(n^4\right)\right) n \underset{n\to+\infty}{=}$
5. **Dérivation d'une fonction usuelle.** Déterminer l'ensemble de dérivabilité puis dériver de chacune des fonctions suivantes.
   1. $x \mapsto \arccos\left(\frac{5x}{1+x}\right)$
   2. $x \mapsto \arctan\left(\ln(4x^2+1)\right)$
   3. $x \mapsto \mathrm{sh}\left(\arcsin(5x+3)\right)$
6. **Calcul de limites.** Calculer les limites suivantes.
   1. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{t-1}-1}{(1-t)^2+\ln(t)}$
   2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n^{5/3}}$
   3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x}$
7. **DL d'un quotient.** Déterminer un développement limité en 0 des fonctions suivantes
   1. $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ à l'ordre 4
   2. $x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ à l'ordre 2
   3. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 2

Question 2.

1. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $y = 5 + x$ i.e. $x = y - 5$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2y} = \mathrm{e}^{10+2x} = \mathrm{e}^{10}\,\mathrm{e}^{2x} &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{10}\left(1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{10}\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{10} + 2\,\mathrm{e}^{10}\,x + 2\,\mathrm{e}^{10}\,x^2 + \frac{4\,\mathrm{e}^{10}\,x^3}{3} + o\left(x^3\right) \\
&\underset{y\to 5}{=} \mathrm{e}^{10} + 2\,\mathrm{e}^{10}\,(y-5) + 2\,\mathrm{e}^{10}\,(y-5)^2 + \frac{4\,\mathrm{e}^{10}\,(y-5)^3}{3} + o\left((y-5)^3\right).
\end{aligned}$$

2. Puisque $x^2 \to 0$ quand $x \to 0$, on a

$$\mathrm{ch}\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{\left(x^2\right)^2}{2} + o\left(\left(x^2\right)^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).$$

3. En utilisant le développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha = -2$, on a

$$(1+x)^{-2} \underset{x\to 0}{=} 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-2-1)}{2}x^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x + 3x^2 + o\left(x^2\right).$$

4. A l'aide du développement limité de sh à l'ordre 5, on a

$$2x\,\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} 2x\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} 2x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} + o\left(x^6\right).$$

5. A l'aide du développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^x$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{6} + \frac{(-x)^4}{24} + \frac{(-x)^5}{120} + \frac{(-x)^6}{6!} + o\left((-x)^6\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{6!} + o\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

Question 3.

1. $\tan\left(\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.
2. Soit $x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$. Puisque $x - \pi \in \left[\frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \subseteq \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que

$$\arctan\left(\tan(x)\right) = \arctan\left(\tan\left(x - \pi\right)\right) = x - \pi.$$

3. $\arcsin\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\sqrt{3}\right) =$!!!! n'existe pas car $\sqrt{3} > 1$!
4. Soit $x \in [-1; 1]$. On a $\cos\left(2\arcsin(x)\right) = \cos^2\left(\arcsin(x)\right) - \sin^2\left(\arcsin(x)\right) = 1 - 2\sin^2\left(\arcsin(x)\right) = 1 - 2x^2$.
5. Soit $x > 0$. On a $8^{\log_2(x)} = \mathrm{e}^{\log_2(x)\ln(8)} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\ln(8)} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{\ln(2)}3\ln(2)} = \mathrm{e}^{3\ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln(x^3)} = x^3$.

Question 4.

1. $o\left(x^4\right) + x^2 + 3o\left(x^8\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^4\right)$.
2. $8o\left(x^4\right)o\left(x\right)x^2 \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^7\right)$
3. Puisque $\ln^5(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^3$, on en déduit que $9x + o\left(x^3\right) + 1008\sqrt{x} + o\left(\ln^5(x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\ln^5(x)\right)$.
4. $\sqrt{x}o\left(x^3\right) + o\left(\ln(x^4)\right)x^2 - o\left(x^2\right)o\left(x^5\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\sqrt{x}x^3\right) + o\left(\ln(x^4)x^2\right) + o\left(x^7\right)$. Or $\ln(x^4)x^2 \underset{x\to+\infty}{\ll} \sqrt{x}x^3 \underset{x\to+\infty}{\ll} x^7$, donc $\sqrt{x}o\left(x^3\right) + o\left(\ln(x^4)\right)x^2 - o\left(x^2\right)o\left(x^5\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\ln(x^4)x^2\right)$.
5. $n^3 + o\left(\frac{1}{n}\right)n^6 + o\left(n^3 + o\left(n^4\right)\right)n \underset{n\to+\infty}{=} n^3 + o\left(n^5\right) + o\left(n^3\right)n \underset{n\to+\infty}{=} n^3 + o\left(n^5\right) + o\left(n^4\right) \underset{n\to+\infty}{=} n^3 + o\left(n^4\right)$.

Question 5.

1. Posons $f : x \mapsto \arccos\left(\frac{5x}{1+x}\right)$. La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}'_f = \left]\frac{-1}{6}; \frac{1}{4}\right[$ et pour tout $x \in \mathscr{D}'_f$,

$$f'(x) = \frac{-5}{(1+x)\sqrt{(1-4x)(1+6x)}}.$$

2. Posons $f : x \mapsto \arctan\left(\ln(4x^2+1)\right)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{8x}{(4x^2+1)\left(1+\ln^2(4x^2+1)\right)}.$$

3. Posons $f : x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin(5x+3))$. La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}'_f = \left]-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}\right[$ et pour tout $x \in \mathscr{D}'_f$,

$$f'(x) = \frac{5}{\sqrt{(5x+2)(5x+4)}} \operatorname{ch}(\arcsin(5x+3)).$$

Question 6.

1. Puisque $\frac{\mathrm{e}^{t-1}-1}{(1-t)^2+\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{t-1} = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{t-1}-1}{(1-t)^2+\ln(t)} = 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n^{5/3}} = \mathrm{e}^{n^{5/3}\ln\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}$. Or $n^{5/3}\ln\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^{1/6} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n^{5/3}} = 0$.
3. Pour tout $x > 0$, on a $\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(x)-\frac{x}{2}\ln(x)}$. Or, $\sqrt{x}\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{2}\ln(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x} = 0$.

Question 7.

1. $\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} = o\left(x^4\right)$.
2. $\frac{x}{\mathrm{e}^x-1} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o\left(x^2\right)$.
3. $\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{7x^2}{12} + o\left(x^2\right)$.