Interrogation 13 d'entrainement
Limite, continuité

Nom :

Prénom :

Note :

1. Dans chacun des cas suivant donner la définition rigoureuse.
   - $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

     ....

     ....

     ....
   - $\lim_{x \to 4} \frac{\sin(x-4)}{x-4} = 1$.

     ....

     ....

     ....
   - La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0.

     ....

     ....

     ....
2. Calculer les limites suivantes.
   - $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$

     ....

     ....

     ....

     ....

     ....
   - $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\,(x+3)\,\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)}$.

     ....

     ....

     ....

     ....

     ....

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\frac{1}{1+x} - \mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$.

....

....

....

....

....

3. Justifier dans chaque cas l'existence d'une solution.
   - $x^7 = 5x^3 - 8x - 3$ pour $x \in [-1; 1]$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   - $\mathrm{e}^x = 5x^2 + 2$ sur $[0; 4]$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   - $x^n + \frac{x}{2} = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ sur $[0; 1]$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4. Dans chaque cas, sans calcul préciser la nature de l'ensemble demandé lorsque c'est possible, puis le donner (on ne justifiera pas les calculs).
   - Pour $f : x \mapsto \mathrm{ch}\left(x^5\right)$, l'ensemble $f\left(\left]-\frac{1}{2}; 1\right]\right)$.

   ....

   ....

   ....

   - Pour $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$, l'ensemble $f([1; 2])$.

   ....

. . . .

. . . .

- Pour $f : x \mapsto -\arccos(x)$, l'ensemble $f\left(\left[\frac{-\pi}{6}; 0\right]\right)$.

. . . .

. . . .

. . . .

5. Calculer en justifiant soigneusement la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos\left(e^x\right)}{x^2+1}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent (dans $\mathbb{R}$) et telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 1 + \lim_{n\to+\infty} f(v_n)$. Que peut-on en déduire ?

. . . .

. . . .

. . . .

7. Déterminer un développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{2x-x^2}{e^x+\ln(1-x)}$ à l'ordre 3.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .