Interrogation 14 d'entrainement
Dérivabilité, suites réelles

1. **Appliquer le théorème des accroissements finis.**
   1. Montrer que arccos est $\frac{2}{\sqrt{3}}$-lipschitzienne sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.
   2. Montrer que $f : x \mapsto \mathrm{ch}(8x)$ est 15-lipschitzienne sur $\left[0;\frac{\ln(2)}{4}\right]$.
   3. Montrer que la partie entière n'est pas lipschitzienne sur $[0;2]$
   4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $f : x \mapsto \mathrm{e}^{i\alpha x}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   5. Montrer que $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ est lipschitzienne sur $[0;\ln(2)]$.
2. **Appliquer le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.** En admettant que les fonctions suivantes sont continues sur I, démontrer qu'elles sont $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I spécifié.
   1. $f : \begin{cases} x\sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $I = \mathbb{R}$.
   2. $f : \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^4}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $I = \mathbb{R}$.
   3. $f : \begin{cases} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $I = \mathbb{R}$.
   4. $f : \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $I = \mathbb{R}$.
   5. $f : \begin{cases} \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. **Savoir passer à la limite.**
   1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{2}{9}u_n^2 + \frac{5}{9}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur l ?
   2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur l ?
   3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leqslant u_n$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur l ?
   4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u_n}}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}_+^*$. Que peut-on en déduire sur l ?
   5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ telle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \sin(u_n)$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire ?
4. **Savoir calculer une suites arithmético-géométriques.** Pour chacune des suites suivantes, déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n.
   1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 7u_n + 1$.
   2. $u_0 = -11$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1} - 2u_n + 15 = 0$.
   3. $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3u_{n+1} + 1$.
   4. $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 2$.
   5. $u_0 = -5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1} - u_n + 8 = 0$.
5. **Savoir calculer une suite récurrente linéaire d'ordre** 2. Pour chacune des suites suivantes, déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n.
   1. $u_0 = 3$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$.
   2. $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\sqrt{3}u_{n+1} - 4u_n$.
   3. $u_0 = -1$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n$.
   4. $u_0 = 1$, $u_1 = -16$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n$.
   5. $u_0 = 2$, $u_1 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_n$. En déduire dans un second temps, une formule pour u_{2n} et une formule pour u_{2n+1}.
6. **Calculer un développement limité.** Cf exercice 11 TD13.

Question 1.

3. Soit f la fonction partie entière sur $[0;1]$. Supposons que f soit lipschitzienne sur $[0;2]$. Il existe alors $k>0$ tel que pour tout $(x,y)\in[0;2]$,
$$|f(x)-f(y)|\leqslant k\,|x-y|$$
En particulier pour tout $h\in]0;1[$, on a $x=1-h\in]0;1[$ et $y\in]1;2[$ alors
$$|f(x)-f(y)|=|0-1|=1\leqslant k\,|x-y|=k\,|1-h-1-h|=k2h.$$
Donc par passage à la limite quand $h\to 0$, on obtient,
$$1\leqslant 0,$$
ce qui est absurde. Donc f n'est pas lipschitzienne sur $[0;2]$.

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=i\alpha\,\mathrm{e}^{i\alpha x}$. La fonction f' est bornée sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$|f'(x)|=|\alpha|\,.$$
Donc $\sup_{z\in\mathbb{R}}|f'(z)|$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\sup_{z\in\mathbb{R}}|f'(z)|\leqslant|\alpha|$. Donc par le théorème des accroissements finis, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\sup_{z\in]x;y[}|f'(z)|\,|x-y|\leqslant\sup_{z\in\mathbb{R}}|f'(z)|\,|x-y|\leqslant|\alpha|\,|x-y|\,.$$
Par conséquent, f est $|\alpha|$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$f'(x)=\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\,.$$
La fonction f' est continue sur le segment $[0;\ln(2)]$ et est donc bornée (et atteint ses bornes) sur $[0;\ln(2)]$ donc $\sup_{z\in[0;\ln(2)]}|f'(z)|$ existe. De plus la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^x$ et $x\mapsto\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ sont positives et croissantes sur $\mathbb{R}$, donc f' est positive et croissante sur $[0;\ln(2)]$. Donc
$$\sup_{z\in[0;\ln(2)]}|f'(z)|=f'\left(\ln(2)\right)=2\,\mathrm{e}^2\,.$$
Donc par le théorème des accroissements finis, pour tout $(x,y)\in[0;\ln(2)]$,
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\sup_{z\in]x;y[}|f'(z)|\,|x-y|\leqslant\sup_{z\in[0;\ln(2)]}|f'(z)|\,|x-y|\leqslant 2\,\mathrm{e}^2\,|x-y|\,.$$
Par conséquent, f est $2\,\mathrm{e}^2$-lipschitzienne sur $[0;\ln(2)]$.

Question 2.

1. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x>0$, $f(x)=x^{3/2}$. Donc
$$\forall x>0,\quad f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow}0.$$
De même pour tout $x<0$, $f(x)=-\left(-x\right)^{3/2}$. Donc
$$\forall x<0,\quad f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{-x}\underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow}0.$$
Ainsi on a donc
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}f'(x)=0.$$
Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, la fonction f est $\mathscr{C}^1$ en 0 (et $f'(0)=0$) et donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $x\neq 0$, $f'(x)=\frac{4}{x^5}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^4}}$. Donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f'(x)=\lim_{u\to+\infty}4u^5\,\mathrm{e}^{-u^4}=0$ par croissance comparée et de même $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f'(x)=\lim_{u\to+\infty}-4u^5\,\mathrm{e}^{-u^4}=0$. Donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f'(x)$ existe et donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, la fonction f est $\mathscr{C}^1$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $x \neq 0$,
$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)x - \operatorname{sh}(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{3} + o(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 0.$$
4. Pour tout $x \neq 0$,
$$f'(x) = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{3} + o(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 0.$$
5. Pour tout $x \neq 0$,
$$f'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)x - (\operatorname{ch}(x)-1)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + o(1) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Question 3.

1. $l = \frac{1}{2}$ ou -5.
2. $l = 3$.
3. $l \geqslant 1$.
4. $l = 1$.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi - \arcsin(l)$.

Question 4.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{7^{n+1}-1}{6}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n - 15$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n + 2$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3}{2^n} - 8$.

Question 5.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + (-3)^n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n-1)5^n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (3n+1)(-4)^n$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 7\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 2(-1)^n$ et $u_{2n+1} = 7(-1)^n$.

Question 6.

1. Déjà fait en classe.
2. $\frac{\ln(y)}{y^2} \underset{y\to 1}{=} (y-1) - \frac{9}{2}(y-1)^2 + \frac{37}{3}(y-3)^3 - \frac{319}{12}(y-1)^4 + o\left((y-1)^4\right)$.
3. $\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{13}{6}x^3 - \frac{x^4}{24} + \frac{121}{120}x^5 + o\left(x^5\right)$.
4. $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) \underset{x\to 0}{=} -x + \frac{3x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + o\left(x^3\right)$.