Interrogation 15 d'entrainement
Suites numériques et polynômes

1. **Utiliser les suites extraites.**
   1. Montrer que la suite $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   2. Pour tout n on note u_n le dernier chiffre de n dans son écriture décimale. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{5}\right)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   5. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \begin{cases} 2u_n & \text{si } u_n \leqslant 5 \\ \frac{u_n}{8} & \text{si } u_n > 5 \end{cases}$.
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. **Limite d'une suite complexe.**
   1. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$.
   2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
   $$u_n = \frac{12n + (5+2i)\,n^2 - (6+3i)\,n^3}{1+3n^2-5n^3}.$$
   3. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{in}$.
   4. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 5 + \frac{3}{n} + i(-1)^n$.
   5. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = -5+3i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{-1+i}{7}u_n$.
3. **Déterminer la monotonie d'une suite.**
   1. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$.
   2. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n + \frac{1}{n}$.
   3. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 3n + 3$.
   4. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{8u_n}{n}$.
   5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.
4. **Calculer un polynôme de matrice.**
   1. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = 2X^3 - X^2 + 5X$. Calculer $P(A)$.
   2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = X^5 + X^4 - 2X^3 + 7X - 8$. Calculer $P(A)$.
   3. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $P = (X+1)^2$. Calculer $P(A)$.
   4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = 5 - 2X + X^2$. Calculer $P(A)$.
   5. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$, avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(A)$.

5. **Calculer la composée de deux polynômes.**
   1. On pose $P = X^2 - 2X + 3$ et $Q = 2X + 3$. Calculer $P \circ Q$ et donner son degré.
   2. On pose $P = \frac{X^2}{3}$. Calculer $P \circ P$ et donner son degré.
   3. On pose $P = X^5$ et $Q = 2X^2 + 1$. Calculer $P \circ Q$ et donner son degré.
   4. On pose $P = 7X + 4$ et $Q = X^8 - X^6 + X^4 + 1$. Calculer $P \circ Q$ et donner son degré.
   5. On pose $P = \frac{X}{2} + 1$. Calculer $R = \underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{n \text{ fois}}$ et donner son degré.

Question 1.

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = i^n$. On observe alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_{4n+2} = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. Or $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $n \mapsto 4n$ et $n \mapsto 4n+2$ sont strictement croissantes). Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux suites extraites ayant des limites distinctes donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{10n} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_{10n+1} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Or $n \mapsto 10n$ et $n \mapsto 10n+1$ sont strictement croissantes donc $(u_{10n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{10n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers des limites distinctes. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2} = n \in \mathbb{N}$, donc $u_{n^2} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2+1 \in]\!]n^2;(n+1)^2[\![$ donc $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$ donc $u_{n^2+1} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $n \mapsto n^2$ et $n \mapsto n^2+1$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{N}$ donc $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers des limites distinctes. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{10n} = \cos(2\pi n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_{10n+5} = \cos(2n\pi+\pi) = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. Or $n \mapsto 10n$ et $n \mapsto 10n+5$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{N}$ donc $(u_{10n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{10n+5})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers des limites distinctes. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
5. On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_{4n+1} = 2 = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. Or $n \mapsto 4n$ et $n \mapsto 4n+1$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{N}$ donc $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers des limites distinctes. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Question 2.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| = \left|\left(\frac{1+i}{3}\right)^n\right| = \left(\frac{|1+i|}{3}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$. Or $0 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$ donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par définition,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{12n+5n^2-6n^3}{1+3n^2-5n^3} + i\frac{2n^2-3n^3}{1+3n^2-5n^3}.$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}(u_n) = \frac{12n+5n^2-6n^3}{1+3n^2-5n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-6n^3}{-5n^3} = \frac{6}{5}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \dfrac{6}{5}$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(u_n) = \frac{2n^2-3n^3}{1+3n^2-5n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{5}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \dfrac{6}{5}$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le complexe $\frac{6+3i}{5}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(u_n) = (-1)^n$ qui diverge donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
5. On reconnait une suite géométrique de raison $q = \frac{-1+i}{7}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = q^n u_0 = (-5+3i)\left(\frac{-1+i}{7}\right)^n.$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|u_n| = |u_0| \times \left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right)^n.$$
Puisque $0 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{7} < 1$, on en déduit que $\left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par suite $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Question 3.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} < 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$. La fonction f est définie et dérivable sur $[1;+\infty[$ et pour tout $x > 1$,
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} > 0.$$
Donc la fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et par continuité sur $[1;+\infty[$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3. On pose $f : x \mapsto x^2 - 3x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$ et on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = f(n)$. Soit Δ le discriminant associé à f : $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$. Donc le graphe de f est une parabole dont les branches sont orientées vers le haut et dont le sommet est à l'abscisse $x_0 = \frac{3}{2} \in]1;2[$. Donc la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est strictement croissante (et c'est le mieux que l'on puisse faire car $u_0 = 3 > u_1 = 1 = u_2$).
4. On démontre par récurrence que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement positive. Alors pour tout $n \geqslant 9$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{8}{n} < 1.$$
Donc la suite $(u_n)_{n \geqslant 9}$ est strictement décroissante.
5. On démontre par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et bien définie. On pose $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$ définie sur $[-2;+\infty[$ et l'on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. La fonction f est strictement croissante (composée de deux fonctions strictement croissantes) sur $[-2;+\infty[$ et donc notamment sur $[0;+\infty[$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Or $u_1 = \sqrt{2} > 0 = u_0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et même strictement croissante.

Question 4.

1. $P(A) = \begin{pmatrix} 22 & 76 \\ 0 & 250 \end{pmatrix}$.
2. $P(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.
3. $P(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $P(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(A) = \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix}$.

(on n'oubliera pas de justifier dans le calcul de chacune des sommes géométriques si la raison est 1 ou non...)

Question 5.

1. Le polynôme $P \circ Q = 4X^2 + 8X + 6$ est de degré 2.
2. Le polynôme $P \circ P = \frac{X^4}{27}$ est de degré 4.
3. Le polynôme $P \circ Q = 32X^{10} + 80X^8 + 80X^6 + 40X^4 + 10X^2 + 1$ est de degré 10.
4. Le polynôme $P \circ Q = 7X^8 - 7X^6 + 7X^4 + 1$ est de degré 8.
5. Le polynôme $R = P \circ P \circ \cdots \circ P = \frac{X}{2^n} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ est de degré 1.