Interrogation 20
Applications linéaires

Nom/Prénom :

Note :

1. Caractériser à partir du rang le fait qu'une famille soit une base.

....

....

....

....

....

....

....

2. Enoncer le théorème de la division euclidienne.

....

....

....

....

....

....

....

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}$. On admet que f est linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f.

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & X^2 P'' \end{array}$. On admet que f est bien définie et linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f.

....

....

....

....

....

....

....

....

5. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1)\,,\, P(2)\,,\, P(3)) \end{array}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un isomorphisme.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose
$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & E \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n. \end{array}$ On admet que f est linéaire. Montrer que f est un isomorphisme.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \subseteq \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est injective.

....

....

....

....

....

....

....

....

9. Faire un développement limité de $\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'ordre $\frac{1}{n^2}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. Faire un développement limité de $\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'ordre $\frac{1}{n^4}$.