Interrogation 20 d'entrainement
Applications linéaires

1. **Enoncer un résultat du cours.**

   1.1 Enoncer la proposition assurant l'existence d'une application linéaire donnée par l'image d'une base.

   1.2 Caractériser à partir du rang le fait qu'une famille soit libre.

   1.3 Caractériser à l'aide de bases adaptées le fait que deux espaces soient supplémentaires (on définira proprement tous les objets).

   1.4 Comparer la dimension de deux espaces vectoriels admettant une surjection (on définira proprement tous les objets).

   1.5 Enoncer le théorème du rang.

   1.6 Lorsque deux espaces vectoriels sont de même dimension finie, caractériser les isomorphismes.

   1.7 Donner l'ensemble des solutions d'une équation linéaire $f(x) = b$ (on définira proprement tous les objets).

   1.8 Enoncer le théorème de la division euclidienne.

   1.9 Définir un nombre premier.

2. **Appliquer le théorème du rang.**

   2.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension du noyau de f ?

   2.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de Tr.

   2.3 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{2n}[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_{2k} X^k \end{array}$. On admet que f est bien définie et linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f.

   2.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} & \mapsto & \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \end{array}$. On admet que f est linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f.

   2.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$. On définit dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. On admet que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de F. On pose enfin $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ f & \mapsto & f'' - 7f' + 10f \end{array}$. On admet que φ est bien définie et est linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de φ.

3. **Appliquer la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.**

   3.1 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(8X + 3) \end{array}$. On admet que f est bien définie et linéaire. Montrer que f est un automorphisme.

   3.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \\ x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} + 2x_n \\ x_n \end{bmatrix} \end{array}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un automorphisme.

   3.3 Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$. On admet que $(\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ forme une base de E. On définit également $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array}$. On admet que φ est bien définie. Montrer que φ est un automorphisme.

   3.4 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (a, b) & \mapsto & a + bj \end{array}$, où on rappelle que $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un isomorphisme.

   3.5 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un automorphisme.

4. **Manipulation théorique des applications linéaires.**
   4.1 Soient E un espace vectoriel et $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Im}(g)$.
   4.2 Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) = \{0_E\}$.
   4.3 Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. Montrer que $\operatorname{Im}(u) \subseteq \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$.
   4.4 Soient E un espace vectoriel et $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $g \circ f = \operatorname{Id}_E$. Montrer que $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$.
   4.5 Soient E un espace vectoriel et $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g(\operatorname{Ker}(f)) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$.
5. **Développement limité de suites.**
   5.1 Donner le développement limité de $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'ordre $\frac{1}{n^2}$.
   5.2 Donner le développement limité de $\left(\frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'ordre $\frac{1}{n}$.
   5.3 Donner le développement limité de $\left(\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'ordre $\frac{1}{n^2}$.
   5.4 Donner le développement limité de $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'ordre $\frac{1}{n^2}$.
   5.5 Donner le développement limité de $\left(\cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'ordre $\frac{1}{n^4}$.

Question 2.

2.1 *Réponse rédigée :* Puisque f est linéaire, $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1. Donc

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) \leqslant \dim\left(\mathbb{R}\right) = 1.$$

Par conséquent, on a deux cas :

- $\mathrm{rg}\,(f) = 0$ et la fonction f est nulle. Dans ce cas $\mathrm{Ker}\ (f) = \mathbb{R}^n$ et donc $\dim\left(\mathrm{Ker}\ (f)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^n\right) = n$.
- $\mathrm{rg}\,(f) = 1 = \dim\left(\mathbb{R}\right)$. Or $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$ et f est surjective. Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim\left(\mathrm{Ker}\ (f)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^n\right) - \mathrm{rg}(f) = n-1$. On dit que $\mathrm{Ker}\ (f)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

2.2 *Réponse rédigée :* On sait que la trace est linéaire et donc $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Comme dans la question précédente, on en déduit que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{Tr}) = 0$ ou 1. Or $\mathrm{Tr}\,(I_n) = n \neq 0$ et donc la trace est non identiquement nulle et son rang est donc non nul. Donc $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) = 1$. Par le théorème du rang, on en déduit que

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\ (\mathrm{Tr})\right) = \dim\left(\mathscr{M}_n\left(\mathbb{R}\right)\right) - \mathrm{rg}\,(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1.$$

2.3 Deux choix, ou on montre que f est surjective et donc $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) = n+1$ puis par le théorème du rang,

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\ (f)\right) = \dim\left(\mathbb{R}_{2n}[X]\right) - \mathrm{rg}\,(f) = 2n+1-(n+1) = n.$$

Ou bien l'on montre que

$$\mathrm{Ker}\ (f) = \mathrm{Vect}\left(X, X^3, X^5, \ldots, X^{2n-1}\right).$$

La famille obtenue étant échelonné en ses degrés est libre et forme donc une base du noyau de f. Donc

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\ (f)\right) = \mathrm{Card}\ \left(X, X^3, X^5, \ldots, X^{2n-1}\right) = n.$$

Puis par le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathbb{R}_{2n}[X]\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}\ (f)\right) = 2n+1-n = n+1.$$

2.4 f étant linéaire $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et est donc de dimension 0 ou 1. Or si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$, alors $f(M) = 1$. Donc f n'est pas l'application nulle et est donc ici surjective : $\mathrm{rg}(f) = 1$.
Donc par le théorème du rang,

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\ (f) = \dim\left(\mathscr{M}_n\left(\mathbb{R}\right)\right)\right) - \mathrm{rg}(f) = n^2 - 1.$$

2.5 *Réponse rédigée :* Puisque pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $e_k \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ (qui est un espace vectoriel) on en déduit que $F \subseteq \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$. Soit $f \in F$ en particulier $f \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$. On a alors

$$f \in \mathrm{Ker}\ (\varphi) \qquad \Leftrightarrow \qquad f \text{ est solution de l'équation } (E) \quad f'' - 7f' + 10f = 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Soit (E_c) : $r^2 - 7r + 10$ l'équation caractéristique associée d'inconnu $r \in \mathbb{C}$. Soit Δ le discriminant associé à (E_c).

$$\Delta = 49 - 40 = 9 > 0.$$

Donc les solutions de (E_c) sont $\frac{7-3}{2} = 2$ et $\frac{7+3}{2} = 5$. Donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{5t} \end{array} \ \middle|\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{2t} \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{5t} \end{array} \right) = \mathrm{Vect}\left(e_2, e_5\right).$$

Attention a priori on résout (E) dans l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et rien ne nous indique au départ que ces éléments seront tous dans le noyau de φ. Ici puisque $e_2 \in F$ et $e_5 \in F$, on en déduit que $\mathscr{S}$ est bien un sous-espace vectoriel de F et donc toutes les solutions de (E) sont dans le noyau. Conclusion :

$$\mathrm{Ker}\ (\varphi) = \mathscr{S} = \mathrm{Vect}\left(e_2, e_5\right).$$

Or e_2 et e_5 ne sont pas deux vecteurs colinéaires et donc forme une base de $\mathrm{Ker}\ (\varphi)$. On en déduit que

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\ (\varphi)\right) = 2.$$

Or $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de F (admis) et donc $\dim(F)=n$. Ainsi, par le théorème du rang,

$$\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim(F) - \operatorname{rg}(\varphi) = n-2.$$

NB : il est possible de déterminer l'image de φ. En effet, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

$$\varphi(e_k) = k^2 e_k - 7k e_k + 10 e_k = \left(k^2 - 7k + 10\right) e_k.$$

Or $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de F. Donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n)) = \operatorname{Vect}\left(4e_1,\dots,\left(n^2-7n+10\right)e_n\right).$$

Or si $k=2$ ou 5, $k^2-7k+10=0$. Donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(4e_1,-2e_3,-2e_4,4e_6,\dots,\left(n^2-7n+10\right)e_n\right).$$

De plus, pour tout $k \in [\![1;n]\!] \setminus \{2,5\}$, $k^2-7k+10 \neq 0$ donc par les opérations $C_k \leftarrow C_k/\left(k^2-7k+10\right)$ pour tout $k \in [\![1;n]\!] \setminus \{2,5\}$, on obtient

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(e_1,e_3,e_4,e_6,e_7,\dots,e_{n-1},e_n).$$

La famille obtenue est une sous-famille de $(e_1,\dots,e_n)$ est est donc libre et forme une base de $\operatorname{Im}(f)$. On retrouve bien que $\operatorname{rg}(f)=n-2$.

Question 3.

3.1 *Réponse rédigée :* Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg(f(P)) = \deg(P(8X+3)) = \deg(P)\times\deg(8X+3) = \deg(P)$ ce qui est toujours vrai même si $P=0$. On en déduit que si $P\neq 0$ alors $\deg(f(P)) \neq -\infty$ et donc $f(P)\neq 0$. Donc si $P\neq 0$, alors $f(P)\neq 0$. Ainsi par contraposée, $f(P)=0 \Rightarrow P=0$ autrement dit, $\operatorname{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. Donc f est injective. Or f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie (et même de dimension $n+1$). Donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.2 On montre que f est injective (son noyau réduit au vecteur nul). Puis f étant un endomorphisme sur un espace de dimension finie ($\mathbb{R}^n$), on en déduit que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

3.3 *Réponse rédigée :* Puisque $(\cos,\sin,\operatorname{ch},\operatorname{sh})$ est une base de E, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}(\varphi(\cos),\varphi(\sin),\varphi(\operatorname{ch}),\varphi(\operatorname{sh})) &= \operatorname{Vect}(-\sin,\cos,\operatorname{sh},\operatorname{ch}) \\
&= \operatorname{Vect}(\cos,-\sin,\operatorname{ch},\operatorname{sh},) & \begin{matrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \\ C_3 \leftrightarrow C_4 \end{matrix} \\
&= \operatorname{Vect}(\cos,\sin,\operatorname{ch},\operatorname{sh},) & C_2 \leftarrow -C_2 \\
&= E.
\end{aligned}$$

Donc φ est surjective. Or φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie ($\dim(E)=4$ car $(\cos,\sin,\operatorname{ch},\operatorname{sh})$ en est une base). Donc φ est un automorphisme de E, $\varphi \in \operatorname{GL}(E)$.

3.4 *Réponse rédigée :* Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
(a,b)\in \operatorname{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(a,b)=0_{\mathbb{C}} \quad &\Leftrightarrow \quad a+bj=0 \\
&\Leftrightarrow \quad a-\frac{b}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}b=0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-\frac{b}{2}=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad a=b=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a,b)=0_{\mathbb{R}^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Donc f est injective. Or $\dim\left(\mathbb{R}^2\right)=2=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Donc f est un isomorphisme.

3.5 On montre que le noyau de f ne contient que le vecteur nul. Donc f est injective. Or f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ un espace vectoriel de dimension finie. Donc f est un automorphisme.

Question 4.

4.1 *Réponse rédigée :* Soit $x\in\operatorname{Im}(g\circ f)$. Alors il existe $y\in E$ tel que $x=g\circ f(y)=g(f(y))$. Donc en posant $z=f(y)$, on a $x=g(z)$. Donc $x\in\operatorname{Im}(g)$. Ainsi, on a $\operatorname{Im}(g\circ f)\subseteq\operatorname{Im}(g)$.

4.2 *Réponse rédigée :* Soit $x \in \text{Ker }(u - \text{Id}_E)$. Alors $(u - \text{Id}_E)(x) = 0_E$ i.e. $u(x) - x = 0$ et donc $u(x) = x$. En composant par u, on obtient que $u^2(x) = u(x)$. Or $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc $0_E = u(x)$. Or on a vu que $u(x) = x$. Donc $x = u(x) = 0$. Ainsi $\text{Ker }(u - \text{Id}_E) \subseteq \{0_E\}$. L'inclusion réciproque découlant du fait que $\text{Ker }(u - \text{Id}_E)$ soit un sous-espace vectoriel, on en déduit que $\text{Ker }(u - \text{Id}_E) = \{0_E\}$.

4.3 *Réponse rédigée :* Soit $x \in \text{Im}(u)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. On compose par u pour obtenir alors que $u(x) = u^2(y)$. Or on sait par hypothèse que $u^2 = u$. Donc $u(x) = u(y)$. Or par construction, $u(y) = x$ et donc $u(x) = u(y) = x$. Ainsi, $u(x) - x = 0_E$ et donc $x \in \text{Ker }(u - \text{Id}_E)$. Conclusion, $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker }(u - \text{Id}_E)$.

4.4 *Réponse rédigée :* Soit $x \in \text{Ker }(g) \cap \text{Im}(f)$. Puisque $x \in \text{Im}(f)$, on sait qu'il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Mais on sait également que $x \in Ker(g)$. Donc $0_E = g(x) = g(f(y)) = g \circ f(y)$. Par hypothèse, $g \circ f = \text{Id}_E$. Donc $0_E = y$ et par suite, $x = u(y) = u(0) = 0$. Donc $\text{Ker }(g) \cap \text{Im}(f) \subseteq \{0_E\}$. L'inclusion réciproque découlant du fait que $\text{Ker }(g) \cap \text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel (intersection de deux sous-espaces vectoriels), on conclut que $\text{Ker }(g) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

4.5 *Réponse rédigée :* Soit $x \in g(\text{Ker }(f))$. Donc il existe $y \in \text{Ker }(f)$ tel que $x = g(y)$. En composant par f, on obtient que $f(x) = f \circ g(y)$. Or $f \circ g = g \circ f$, donc $f(x) = g \circ f(y)$. Mais puisque $y \in \text{Ker}(f)$, on a $f(y) = 0_E$ et donc $f(x) = g(0_E) = 0_E$. Donc $x \in \text{Ker }(f)$. Conclusion $g(\text{Ker }(f)) \subseteq \text{Ker }(f)$.

Question 5.

5.1 *Réponse rédigée :* On a

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}.$$

Or on sait que $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + o(u^2)$. Donc en posant $u = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Or $\mathrm{e}^v \underset{v\to 0}{=} 1 + v + \frac{v^2}{2} + o(v^2)$. Posons $v = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a alors $v^2 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $o(v^2) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi,

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

5.2 $\frac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

5.3 $\frac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{5}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

5.4 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{n} + \frac{\mathrm{e}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

5.5 $\cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.