Correction de l'interrogation 3 du 02/10
Nombres complexes

On considère l'équation complexe d'inconnu $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 - (1+5i)\,z + (4i-4) = 0 \qquad (E)$$

1. Calculer Δ le discriminant associé à l'équation (E).
Réponse : d'après la formule bien connue,
$$\Delta = (1+5i)^2 - 4\,(4i-4) = 1 - 25 + 10i - 16i + 16 = -8 - 6i.$$

2. Déterminer les racines carrées de Δ.
Réponse : ne me parlez surtout pas de discriminant négatif ou non. Ce discriminant est complexe. Soit $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors $x^2 - y^2 + 2ixy = -8 - 6i$. Donc par unicité de la forme algébrique d'un complexe,
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6. \end{cases}$$
De plus l'égalité $|\delta|^2 = |\Delta| = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$, nous fournit la troisième équation $x^2+y^2 = 10$. Ainsi
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 = \frac{10-8}{2} = 1 \\ y^2 = \frac{10+8}{2} = 9 \\ 2xy = -6. \end{cases}$$
Or $xy \leqslant 0$ donc les réels x et y sont de signes opposés. D'où $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$. Donc $\delta = 1 - 3i$ ou $\delta = -1 + 3i$.

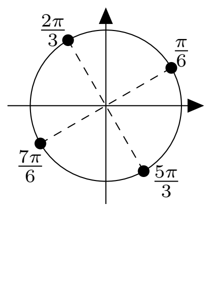
3. Résoudre l'équation (E).
Réponse : d'après le cours, les deux racines sont $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$, donc d'après la question précédente,
$$z_1 = \frac{1+5i+1-3i}{2} = 1+i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1+5i-1+3i}{2} = 4i.$$

On considère le complexe $z = -2 + i2\sqrt{3}$.

4. Donner la forme polaire de z.
Réponse : une simple factorisation nous permettait de reconnaitre une forme remarquable :
$$z = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

5. En déduire les racines quatrièmes de z et placer les arguments de ces racines sur le cercle trigonométrique.

Réponse : D'après le cours on sait que les racines n-ième d'un complexe $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ sont données par $\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}+i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![1; n]\!]$. Ici $n = 4$, $r = 4$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Donc
$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= \left\{ \sqrt[4]{4}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3\times 4}+i\frac{2k\pi}{4}} \;\middle|\; k \in \{0;1;2;3\} \right\} \\ &= \left\{ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{k\pi}{2}} \;\middle|\; k \in \{0;1;2;3\} \right\} \\ &= \left\{ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}; \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}; \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}; \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}} \right\}. \end{aligned}$$



Soient $A\,(z_A)$, $B\,(z_B)$ et $C\,(z_C)$ trois points du plan complexe.

6. Caractériser en fonction des affixes z_A, z_B et z_C le fait que ABC soit rectangle en A
Réponse : ABC est rectangle en A si et seulement si $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}$.

7. Montrer que si $z_A = 1 + i$, $z_B = 4 + 3i$ et $z_C = \frac{5}{2}i$ alors le triangle ABC est rectangle en A.
Réponse : on calcule $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. On trouve :

$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4 + 3i - 1 - i}{\frac{5}{2}i - 1 - i} &= \frac{2\,(3 + 2i)}{5i - 2 - 2i}\\ &= \frac{2\,(3+2i)}{-2+3i} = \frac{2\,(3+2i)\,(-2-3i)}{4+9} = \frac{2\,(-6-4i-9i+6)}{13} = \frac{2\,(-13i)}{13} = -2i.\end{aligned}$$

Donc $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}$ et d'après la question précédente, le triangle ABC est rectangle en A.

8. Déterminer $D\,(z_D)$ l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Réponse : d'après le cours, on sait que $z_D = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,(z_B - z_A) + z_A$. Donc,

$$z_D = i\,(4 + 3i - 1 - i) + 1 + i = i\,(3 + 2i) + 1 + i = 3i - 2 + 1 + i = -1 + 4i.$$

On considère $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto 2z + 1 \end{cases}$.

9. Déterminer les éventuels points fixes de φ.
Réponse : soit $\omega \in \mathbb{C}$. ω est un point fixe de φ si et seulement si

$$\varphi\,(\omega) = \omega \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\omega + 1 = \omega \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = -1.$$

Donc $\omega = -1$ est l'unique point fixe de φ.

10. A quelle transformation du plan correspond φ ?
Réponse : on observe alors que $\varphi(z) = 2\,(z+1) - 1 = 2\,(z - \omega) + \omega$. Donc φ est une homothétie de centre $\omega = -1$ et de rapport 2.