Interrogation 6 d'entrainement
Equations différentielles et révisions

1. **Enoncer un théorème ou une définition.**
   1. Enoncer le théorème de changement de variable.
   2. Enoncer la propriété d'intégration par parties.
   3. Enoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.
   4. Enoncer le fait que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène est un espace vectoriel.
   5. Enoncer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1.
   6. Donner la définition d'un problème de Cauchy.
2. **Mettre une équations différentielles sous forme normalisée.** Mettre les équations différentielles ci-dessous sous forme normalisée et déterminer les intervalles sur lesquelles il est possible de résoudre l'équation.
   1. $\cos(t)y'(t) + \left(1+t^4\right)\left[y(t) - \left(1+t^4\right)^{-1} y(t) - 5t^2\right] = 0$
   2. $\mathrm{ch}(x)y'(x) + xy(x) + \ln\left(\frac{1}{x^2+5}\right) + \mathrm{sh}(x)y'(x) - \lfloor x \rfloor y(x) = 0$
   3. $x^2y'(x) + (3x+2)^a y(x) + 5y'(x) - 3x + 4xy(x) + 8 = 0,\ a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$
   4. $\ln(\mathrm{ch}(\xi) - 1) + \zeta'(\xi) + \mathrm{e}^{\xi^a} + \arctan(12\xi)\,\zeta(\xi) = 0,\ a \in \mathbb{N}^*$
   5. $\ln(\mathrm{ch}(x)) + 2y(x) + (2-9x)^a y'(x) = 7xy(x),\ a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
3. **Résoudre une équation différentielle homogène.** Résoudre les équations différentielles suivantes et préciser les intervalles possibles de résolution.
   1. $y'(t) - \left(5t^2+3t\right)y(t) = 0$
   2. $y'(t) + \frac{\mathrm{sh}(t)y(t)}{\mathrm{ch}^4(t)} = 0$
   3. $y'(u) + \frac{3u}{u^2+7}y(u) = 0$
   4. $\sqrt{1-x^2}\,y'(x) = y(x)$
   5. $m'(z) + m(z)(5z-2)^a = 0,\ a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
   6. $T(r)\tan(r) + T'(r) = 0$
4. **Déterminer une solution particulière.** Pour chacune des équations différentielles suivantes déterminer une solution.
   1. $\cos(t)y'(t) + \sin(t)y(t) = 1$
   2. $y'(x) - y(x) = \mathrm{e}^{2ix}$
   3. $y'(t) + 4y(x) = \mathrm{ch}(x)$
   4. $f'(x) - 5xf(x) = 5x^2 - 3x + 1$
   5. $f'(t) + 4f(t) = (3t+7)\,\mathrm{e}^{-4t}$
   6. $y'(u) + \frac{3}{2}y(u) = \frac{4}{u} + 6\ln(u)$
5. **Savoir faire une intégration par parties.** A l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera soigneusement calculer l'intégrale suivante. Cf exercice 6 et/ou 2 du TD8.
6. **Décomposer en éléments simples.** Mettre sous forme $P(x) + \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta}$ lorsque c'est possible la fraction suivante. Cf les fractions de l'exercice 9 du TD8.
7. **Racines n-ièmes d'un complexe.** Dans chaque cas, déterminer les racines n-ième du complexe z.

   1. $n=4,\ z = 8\sqrt{2}\,(1+i)$ 2. $n=6,\ z = -\mathrm{e}^{\frac{7i\pi}{3}}$ 3. $n=10,\ z=12i$

Question 2.

1. Sur $I \in \left\{ \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. Sur $I \in \{]k ; k+1[\mid k \in \mathbb{Z} \}$
3. Sur $\left]-\frac{2}{3} ; +\infty\right[$
4. Sur $I =]-\infty ; 0[$ ou sur $]0 ; +\infty[$
5. Sur $I = \left]-\infty ; \frac{2}{9}\right[$

Question 3.

1. Sur $\mathbb{R}$, $\left\{ t \mapsto C \,\mathrm{e}^{\frac{5}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$
2. Sur $\mathbb{R}$, $\left\{ t \mapsto C \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3\,\mathrm{ch}^3(t)}} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$
3. Sur $\mathbb{R}$, $\left\{ t \mapsto \frac{C}{\sqrt{(u^2+7)^3}} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$
4. Sur $]-1 ; 1[$, $\left\{ x \mapsto \mathrm{e}^{\arcsin(x)} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$
5. Sur $\left]\frac{2}{5} ; +\infty\right[$, $\left\{ z \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{(5z-2)^{a+1}}{a+1}} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$
6. Sur $I \in \left\{ \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, $\{ r \mapsto C\cos(x) \mid C \in \mathbb{R} \}$

Question 4.

1. Sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \sin(t)$
2. Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1+2i}{5}\,\mathrm{e}^{2ix}$
3. Sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{10} + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{6}$
4. Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto -x + \frac{3}{5}$
5. Sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \left(\frac{3}{2}t+7\right) t\,\mathrm{e}^{-4t}$
6. Sur $\mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto 4\ln(u)$

Question 7.

1. $\left\{ 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{16}+i\frac{k\pi}{2}} \;\middle|\; k \in [\![0 ; 3]\!] \right\}$
2. $\left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{9}+i\frac{k\pi}{3}} \;\middle|\; k \in [\![0 ; 5]\!] \right\}$
3. $\left\{ \sqrt[10]{12}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{20}+i\frac{k\pi}{10}} \;\middle|\; k \in [\![0 ; 9]\!] \right\}$