

Interrogation 8 d'entraînement Equations différentielles, matrices et révisions

1. Enoncer un théorème ou une définition.

1. Enoncer la définition d'un problème de Cauchy d'ordre 2.
2. Qu'est-ce qu'une équation caractéristique ? On représentera toutes les notations nécessaires.
3. Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
4. Relier la primitive d'une fonction f valant A au point a à f en précisant tous les objets manipulés et les hypothèses associées.

2. Résoudre une équation différentielle homogène d'ordre 2 dans \mathbb{R} . Résoudre proprement l'équation différentielle suivante. On présentera chacune des notations utilisées. On donnera le résultat sous forme d'espace vectoriel.

1. $y'' + 2y' - 15y = 0$
2. $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$
3. $y'' - 16y' + 64y = 0$

3. Déterminer la solution d'un problème de Cauchy. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle précédente vérifiant (ici les données correspondent respectivement aux questions précédentes).

1. $y(0) = 8$ et $y'(0) = 8$.
2. $y(\pi) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $y'(\pi) = \frac{7}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$.
3. $y(1) = y'(1) = e^2$.

4. Savoir écrire une matrice. Ecrire la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie comme suit.

1. Pour $n = 4$ et tout $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, $a_{i,j} = i^2$ si $j = 1$ et $a_{i,j} = a_{i,j-1} + 1$ si $j \geq 2$.
2. $A = \text{diag}(3, -6, 2, 8) - 4I_4$.
3. Pour $n = 5$ et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$, $a_{i,i} = 0$ et si $j > i$ alors $a_{i,j} = a_{j,i} = ij$.

5. Savoir faire un produit de matrices. Faire l'exercice 1 du TD10.

6. Connaître les fonctions circulaires réciproques.

1. Quelle est l'équation de la tangente de la fonction arc sinus en 0 ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Enoncer une formule reliant $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Etudier le domaine de dérivabilité et dériver la fonction $x \mapsto \arccos(\ln(3-x))$.

7. Résoudre une équation. Résoudre proprement l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $x + 5 = \sqrt{x + 11}$.
2. $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$.
3. $x + 1 = \sqrt{x + 2}$.

**Question 2.**

1. Vect $\left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-5x}, x \mapsto e^{3x} \end{array} \right)$
2. Vect $\left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{3x}{2}\right), x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \end{array} \right)$
3. Vect $\left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x e^{8x}, x \mapsto e^{8x} \end{array} \right)$

Question 3.

1. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2e^{-5x} + 6e^{3x}$
2. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{3x}{2}\right) + 3e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$
3. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (-7x + 8)e^{8x-6}$

Question 4.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 0 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 0 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 0 \end{pmatrix}$

Question 7.

1. $\mathcal{S} = \{-2\}$
2. $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
3. $\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$