Interrogation 9 d'entrainement
Systèmes linéaires, matrices, ...

1. **Savoir énoncer un théorème ou une définition.**
   1. Enoncer la formule théorique du produit de matrices.
   2. Enoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.
   3. Enoncer la propriété de l'inverse du produit de deux matrices.
   4. Enoncer la propriété de linéarité de la trace.
2. **Faire du calcul matriciel.** Pour chacune des matrices A suivantes, calculer A^2, ${}^tA$ et $\mathrm{tr}(A)$.

   1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & i & 5 \end{pmatrix}$.
   2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. **Savoir échelonner un système linéaire.** Pour chacun des systèmes linéaires suivants, déterminer un système échelonné équivalent en lignes.
   1. $(S) : \begin{cases} x & -3y & +2z & = 2 \\ 2x & +4y & +z & = 4 \\ 7x & +9y & +5z & = 10 \end{cases}$
   2. $(S) : \begin{cases} x & +2y & -3z & = 4 \\ x & +3y & +z & = 11 \\ 2x & +5y & -4z & = 13 \end{cases}$
   3. $(S) : \begin{cases} x & -3y & +7z & = 20 \\ x & +2y & -3z & = 5 \\ 7x & +4y & -z & = 65 \end{cases}$
4. **Savoir résoudre un système échelonné.** Dans chacun des systèmes échelonnés de la question précédente, préciser les inconnues principales et paramètre puis résoudre le système. On donnera les solutions sous forme ensembliste PUIS vectorielle.
5. **Savoir résoudre une équation différentielle homogène d'ordre 1.** Pour chaque équation différentielle, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
   1. $(E) \quad y'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y(x) = 1$ sur $I =]0; +\infty[$.
   2. $(E) \quad y'(x) + \frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))} y(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$ sur $I =]0; +\infty[$.
   3. $(E) \quad y'(x) + \frac{x+1}{x(x-1)} y(x) = x^2$ sur $I =]1; +\infty[$.
6. **Savoir appliquer la méthode de variation de la constante.** Pour chacune des équations différentielles de la question précédente, déterminer l'ensemble des solutions à l'aide de la méthode de variation de la constante.
7. **Savoir manipuler les sommes.** Calculer les sommes suivantes.
   1. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} 3^{-k}$, avec $n \geqslant 1$.
   2. $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$, pour $n \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$ (on ne cherchera pas obligatoirement à simplifier le résultat).
   3. $\sum_{k=1}^{n} k 2^k$, on fera apparaitre une somme double en transformant $k = \sum_{\cdots}^{\cdots} \ldots$ en somme.
8. **Bonus : surprise du chef !**

Question 2.

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2i & -12 \\ 16 & 9 & -8 \\ -6+4i & 8i & 27 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & i \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}(A) = 9$.
2. $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}(A) = 1$.
3. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}(A) = 3$.

Question 3.

1. $(S) \underset{\mathscr{L}}{\sim} \left\{ \begin{array}{llll} \boxed{1}x & -3y & +2z & = -2 \\ & \boxed{10}y & -3z & = 0 \\ & & 0 & = -4 \end{array} \right.$
2. $(S) \underset{\mathscr{L}}{\sim} \left\{ \begin{array}{llll} \boxed{1}x & +2y & -3z & = 4 \\ & \boxed{1}y & +4z & = 7 \\ & & \boxed{-2}z & = -2 \end{array} \right.$
3. $(S) \underset{\mathscr{L}}{\sim} \left\{ \begin{array}{llll} \boxed{1}x & -3y & +7z & = 20 \\ & \boxed{1}y & -2z & = -3 \\ & & 0 & = 0 \end{array} \right.$

Question 4.

1. Les inconnues principales sont x et y. L'inconnue z est une inconnue paramètre. $\mathscr{S} = \emptyset$.
2. Les inconnues principales sont x et y et z. Aucune inconnue n'est une inconnue paramètre. $\mathscr{S} = \{(1,3,1)\}$.
3. Les inconnues principales sont x et y. L'inconnue z une inconnue paramètre.

$$\mathscr{S} = \left\{ (11-z, -3+2z, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = (11,-3,0) + \mathrm{Vect}\,(-1,2,1)\,.$$

Question 5.

1. $\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{x}\,\mathrm{e}^{x^2} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{x^2} \end{array} \right)$.
2. $\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{1+\ln^2(x)} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+\ln^2(x)} \end{array} \right)$.
3. $\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{Cx}{(x-1)^2} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{(x-1)^2} \end{array} \right)$.

Question 6.

1. $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{x}\,\mathrm{e}^{x^2} - \frac{1}{2x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.
2. $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C+\ln(x)}{1+\ln^2(x)} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.
3. $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C\right)x}{(x-1)^2} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

Question 7.

1. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} 3^{-k} = \frac{4^{n+1} - 3^{n+1} - 1}{3^{n+1}}$.
2. $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) = \frac{1}{2}\frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{x}} + \frac{1}{2}\frac{1-\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ si $x \neq 0$ et $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) = n+1$ si $x = 0$. On pourrait simplifier cette expression par une factorisation par l'angle moitié : $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) = \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{nx}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$ si $x \neq 0$.
3. $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.