Programme de colles 10
Polynômes et espaces vectoriels

Quinzaine du 18 Février au 17 Mars

Polynômes

1. Définition d'un polynômes, addition, produit, composition. Degré d'un polynôme, de la somme, du produit, de la composition.
2. Polynômes de degré inférieur ou égal à n. Evaluation d'un polynôme en un réel, une matrice, un fonction.
3. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
4. Polynôme dérivée. Dérivée n-ième. Linéarité de la dérivation. Formule de Leibniz.
5. Formule de Taylor pour les polynômes.
6. Divisibilité de P par Q. Division euclidienne de polynômes.
7. Racine d'un polynôme. Caractérisation par la factorisation.
8. Un polynôme ayant plus de racines que son degré est nul.
9. Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation avec les dérivées.
10. Factorisation des polynômes en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
11. Relation entre la somme des racines et les coefficients de P et relation entre le produit des racines et les coefficients de P.

Espaces vectoriels

1. Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Définition d'une combinaison linéaire, d'un sous-espace vectoriel.
3. Caractérisation des sous-espaces vectoriels comme des sous-ensembles contenant 0_E et stables par combinaisons linéaires.
4. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. C'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion.
5. Intersection et somme de sous-espaces vectoriels.
6. Espaces en somme directe, espaces supplémentaires. Définition et caractérisation.

Questions de cours

1. Démontrer l'unicité de la division euclidienne.
2. Montrer que si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ alors α est une racine de multiplicité m de P.
3. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
4. Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
5. Montrer que deux espaces sont en somme directe si et seulement si leur intersection est réduite à 0.