



Programme de colles 12

Applications linéaires et dénombrement

Quinzaine du 1 au 14 Avril

Applications linéaires

1. Révisions du programme précédent.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Lorsque f est injective/surjective/bijective comparaison des dimensions de E et F .
3. Tous les espaces isomorphes sont de même dimension et tous les espaces de dimension n sont isomorphes à \mathbb{R}^n .
4. Définition du rang. Théorème du rang. Lorsque $\dim(E) = \dim(F)$, f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.
5. Ensemble des solutions d'une équation $f(x) = b$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.

Arithmétique

1. Rudiments d'arithmétique : divisibilité, congruence (rien de très élaboré, juste la définition et quelques opérations élémentaires). Division euclidienne, algorithme d'Euclide, PGCD, PPCM.
2. Nombres premiers et décomposition de tout entier en produit de facteurs premiers.

Dénombrement

1. Un ensemble est fini s'il est en bijection avec $\llbracket 1; n \rrbracket$, son cardinal est alors n . Deux ensembles ont le même cardinal si et seulement s'ils sont en bijection.
2. Un sous-ensemble d'un ensemble est un ensemble fini et de cardinal plus petit (admis). Cas d'égalité des cardinaux.
3. Caractérisation des bijections sur et dans des ensembles finis.
4. Ensembles disjoints, cardinal de l'union disjointe. Notation \sqcup .
5. Cardinal du complémentaire, de l'union quelconque, de l'ensemble produit de deux ensembles finis.
6. p -uplet, ensemble des p -uplets, cardinal de E^p .
7. Application de E dans F , cardinal de $F^E = \mathcal{F}(E, F)$.
8. Arrangement, nombre d'arrangements de p éléments parmi n , notation A_n^p et calcul. Nombre d'injections.
9. Permutation, définition et calcul.
10. Combinaison : une combinaison est une partie de p éléments dans un ensemble à n éléments. Nombre de combinaisons, notation et calcul avec des factoriels.
11. Rappels des formules sur les combinaisons, formule de Pascal et de Newton.
12. Parties de E , $\mathcal{P}(E)$. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

Questions de cours

1. Énoncer et démontrer le théorème du rang.
2. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(g), \text{rg}(f))$.
3. Démontrer la formule donnant le cardinal d'une union disjointe.
4. Démontrer la formule donnant le cardinal de l'ensemble $E \times F$.