Programme de colles 14
Intégration et représentation matricielle des applications linéaires

Quinzaine du 13 Mai au 26 Mai

Intégration

1. Définition d'une subdivision et d'une fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.
2. Théorème d'approximation de Weierstrass si f est continue sur $[a;b]$ alors on peut l'approcher à ε près par une fonction φ en escalier.
3. Corollaire, si f est continue sur $[a;b]$ on peut l'approcher par deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.
4. Définition de l'intégrale d'une fonction continue comme le sup des intégrales des fonctions en escalier inférieures à f et l'inf des fonctions en escalier supérieure à f.
5. Propriétés : linéarité, positivité/croissance, séparation (intégrale nulle d'une fonction positive), relation de Chasles.
6. Inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne (à redémontrer à chaque utilisation), inégalité de Cauchy-Schwarz.
7. Théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale de a à x de f est l'unique primitive de f. Cas de l'intégrale de f' lorsque f est $\mathscr{C}^1$.
8. Sommes de Riemann et convergence des sommes.
9. Formule de Taylor avec reste intégrale.
10. Inégalité de Taylor-Lagrange (à redémontrer à chaque utilisation).

Représentation matricielle des applications linéaires

1. Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base. Notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$. Matrice d'une application linéaire dans deux bases $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$. Notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$.
2. A $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ fixées, isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Conséquence, linéarité, unicité de la matrice associée, de l'application linéaire associée lorsque les bases sont données. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$.
3. Cas d'un espace vectoriel avec une base canonique. Matrice/application linéaire canoniquement associée.
4. Formule $Y = AX$ i.e. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$ traduisant l'évaluation $y = f(x)$.
5. Matrice de la composition. Matrice de f^k.
6. Matrice d'un isomorphisme. Matrice de l'inverse. Une famille est une base si et seulement si sa matrice dans une base est inversible.
7. Matrice de passage. Notation $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Inverse, composition.
8. Formule $X = PX'$ i.e. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.
9. Formule de changement de bases $D = P^{-1}AQ$ ou $A = PDQ^{-1}$ i.e. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = P_{\mathscr{B}'_F,\mathscr{B}_F}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$ ou $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = P_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f)\,P_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E}$.
10. Noyau, image, rang d'une matrice (définition avec la dimension de l'image coïncidant avec la définition du nombre de pivots).
11. Conservation du rang par des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes.
12. Théorème du rang et caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par le noyau ou l'image ou le rang.

Questions de cours

1. Formule de Taylor avec reste intégral : énoncé et démonstration.
2. Convergence d'une somme de Riemann : énoncé dans le cas continue et démonstration dans le cas $\mathscr{C}^1$.
3. Enoncer de l'isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et démonstration de la linéarité.
4. Enoncer et démonstration de la matrice d'une composition.