



## Programme de colles 04

### Fonctions réelles et usuelles

Quinzaine du 12 au 25 novembre

#### Fonctions réelles

1. Définition d'une fonction, d'ensemble de définition, d'ensemble image, d'image réciproque.
2. Opérations élémentaires sur les fonctions, composée.
3. Graphe d'une fonction, transformation du graphe : translation horizontale  $x \mapsto f(x + a)$ , translation verticale  $x \mapsto f(x) + a$ , dilatation horizontale  $x \mapsto f(ax)$ , dilatation verticale  $x \mapsto af(x)$ .
4. Fonction paire, impaire, périodique, conséquences sur les graphes.
5. Monotonie, majoration, minoration, fonctions bornées.
6. Continuité : somme, produit, composition de fonctions continues, théorème des valeurs intermédiaires.
7. Dérivation : taux d'accroissement, équation de la tangente, dérivation d'une somme, d'un produit d'une composée.
8. Dérivées  $n$ -ièmes, formule de Leibniz.
9. Maximum minimum local, global.
10. Injection, surjection, bijection. Fonction réciproque, graphe de la fonction réciproque. Théorème de la bijection. Dérivée de la réciproque.
11. Asymptote, branche parabolique.

#### Fonctions usuelles

1. Le logarithme népérien défini comme étant la fonction  $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$ . Continuité, dérivation, monotonie. Propriétés algébriques. Limite aux bornes, graphe, croissances comparées :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ .
2. La fonction exponentielle (comme réciproque de la fonction logarithme). Continuité, dérivation, propriétés algébriques, graphes, limites aux bornes et croissances comparées  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .
3. Les fonctions exponentielle et logarithme en base  $a$ . Dérivation, propriétés algébriques, graphes.
4. Les fonctions puissances, dérivation, propriétés algébriques, limites aux bornes, prolongement par continuité en 0, monotonie, graphes, croissances comparées.
5. Les fonctions hyperboliques, définition, parité,  $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ ,  $\operatorname{ch}(x + y)$  et  $\operatorname{sh}(x + y)$ . Limites aux bornes,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(x)}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$ .

#### Questions de cours

1. Formule de Leibniz, énoncé et démonstration.
2. Démontrer que  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et/ou que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
3. Démonstration de la propriété  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$  et de  $\ln(1/x) = -\ln(x)$ .
4. A l'aide des limites usuelles sur le logarithme et l'exponentielle, démontrer une (ou plusieurs) des limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^b |\ln(x)|^a = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^{ax} = 0$ .
5. Énoncé du théorème de la bijection (version 2) pour une fonction élémentaire (exponentielle, logarithme, cube...) et dérivation de la fonction réciproque à l'aide de la dérivée de la fonction de départ.