Programme de colles 08
Analyse asymptotique et continuité

Quinzaine du 21 Janvier au 03 Février

Analyse asymptotique

1. Négligeabilité : définition par la limite du quotient. Notation $\ll$ ou o.
2. Croissance comparée, classement par ordre de prépondérance de vitesses usuelles.
3. Propriétés algébriques des o : transitivité, somme, produit, absorption des constantes, inverse.
4. Equivalence : définition par la limite du quotient. $\sim$ est une relation d'équivalence. Lien avec o.
5. Deux équivalents ont même nature (convergence ou divergence), même limite (lorsqu'elle existe) et même signe (lorsqu'il est fixe).
6. Opérations algébriques sur les équivalents : produit, élévation à une puissance fixe, passage à l'inverse notamment, passage à la valeur absolue. Composition à droite et non-composition à gauche. Equivalents usuels.
7. Développements limités en 0, en x_0.
8. Unicité, troncature. Cas des fonctions paires ou impaires en 0.
9. DL et continuité/dérivabilité. Toute fonction $\mathscr{C}^n$ admet un DL d'ordre n.
10. DL usuels : e^x, cos, sin, ch, sh, $(1+x)^\alpha$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$.
11. Forme normalisée, somme, produit, composée et quotient de DL.
12. Intégration et dérivation lorsque f est $\mathscr{C}^n$ (pour un DL à l'ordre $n-1$ de f').
13. Théorème de Taylor-Young.
14. Application : recherche de limites, d'asymptote, de tangente, position par rapport à la tangente au voisinage.

Limite et continuité

1. Définition de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Unicité de la limite. Limite à droite, à gauche. Somme, produit, quotient, valeur absolue de limites. Composition de limites. Passage à la limite dans les inégalités.
3. Si f admet une limite finie alors, f est bornée.
4. Théorème d'encadrement, de majoration, de minoration. Théorème de la limite monotone.
5. Caractérisation séquentielle de la limite.
6. Continuité : définition. Continuité à droite, à gauche. Prolongement par continuité.
7. Caractérisation séquentielle de la continuité.
8. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Théorème de la bijection. Image d'un segment par une fonction continue.

Questions de cours

1. Comparer asymptotiquement $(n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Le démontrer.
2. Démonstration du DL de $\frac{1}{1-x}$ puis de celui de $\ln(1-x)$.
3. Enoncer le théorème de Taylor-Young :

Théorème IV.9 (Taylor-Young)

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right).$$

4. Démonstration du théorème d'encadrement dans le cas où la variable tend vers $-\infty$.
5. Démonstration à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
6. Enoncer la caractérisation séquentielle de la continuité.