Programme de colles 09
dérivabilité et suites numériques

Quinzaine du 04 au 17 Février

Dérivabilité

1. Définition de la dérivabilité en ε. Rappel du lien avec un DL à l'ordre 1 et avec la tangente.
2. Fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$.
3. Formule de Leibniz.
4. Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche.
5. Tout extremum intérieur est un point critique.
6. Théorème de Rolle.
7. Identité des accroissements finis.
8. Lien entre la monotonie de f et le signe de f'.
9. Théorème des accroissements finis.
10. Définition d'une fonction lipschitzienne.
11. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.
12. Extension aux fonctions complexes : caractérisation avec les parties réelles et imaginaires, théorème des accroissements finis.

Suites numériques

1. Définition du suite réelles : de façon explicite, implicite, par récurrence (simple ou double).
2. Suites arithmétiques, géométriques définitions et somme des termes.
3. Suites arithmético-géométriques : définition et méthode de résolution.
4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : expressions explicites.
5. Suites monotones. Une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone si f est croissante.
6. Suites convergentes, divergentes.
7. Une suite est bornée si et seulement la suite des valeurs absolues est majorée.
8. Une suite convergente est bornée.
9. Une suite est asymptotiquement du même signe que sa limite (si celle-ci existe et est non nulle).
10. Si $u_n \to l$ alors $|u_n| \to |l|$ avec réciproque si $l = 0$.
11. Théorème d'encadrement et de convergence monotone.
12. Définition d'une suite extraite. Si la suite converge alors toute suite extraite converge vers la même limite. Réciproque si la suite des termes pairs et la suite des termes impairs convergent vers la même limite.
13. Suites adjacentes. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
14. Moyenne de Cesàro. Si la suite converge alors sa moyenne de Cesàro converge vers la même limite.
15. Suites complexes : définition de la limite. Toute suite complexe qui converge est bornée, unicité de la limite, opérations sur les limites.
16. Caractérisation de la convergence avec les parties réelles et imaginaires.
17. Suites récurrentes linéaires complexes d'ordre 2.

Questions de cours

1. Démontrer le théorème de Rolle.
   Ils pourront admettre le fait que si a est un extremum intérieur alors a est un point critique.
2. Démontrer l'identité des accroissements finis *(à l'aide du théorème de Rolle)*.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie si $u_0 \in U$ avec U une partie stable de f.
4. Démontrer qu'une suite réelle convergente est bornée.
5. Démontrer que deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.