Révisions d'hiver 10

Pour Mercredi 06/03

Ensembles et applications

Exercice I (S'entrainer)

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. La fonction f est injective sur E.
2. Pour tout couple de parties de E : $(A, B) \in \mathscr{P}(E)$, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Solution de l'exercice I

Supposons que f soit injective. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(E)$. Montrons que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. On a toujours $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ (même si f n'est pas injective). Redémontrons-le pour l'occasion. Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A \cap B$, alors $x \in A$. Ainsi $y = f(x)$ est l'image d'un élément de $x \in A$. Donc $y \in f(A)$. De même puisque $x \in A \cap B$, alors $x \in B$ et donc $y = f(x)$ est l'image d'un élément de $x \in B$. Donc $y \in f(B)$. Par conséquent, $y \in f(A) \cap f(B)$ et on a démontré que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Réciproquement, montrons que $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$. Si $y \in f(A) \cap f(B)$, alors $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$ donc il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $y = f(x_1)$ et $y = f(x_2)$. En particulier $f(x_1) = f(x_2)$. Or f est injective donc $\underbrace{x_1}_{\in A} = \underbrace{x_2}_{\in B}$. Donc $x_1 \in A \cap B$. Ainsi y est l'image d'un élément de $A \cap B$ et donc $y \in f(A \cap B)$. Finalement $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ et donc

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Supposons maintenant que pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(E)$, on ait $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Montrons que f est injective. Soient $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons $z = f(x) = f(y)$. Puisque $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$ sont deux partis de E, on a par hypothèse,

$$f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{z\} \cap \{z\} = \{z\}.$$

Or si $x \neq y$, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ et donc $f(\{x\} \cap \{y\}) = \emptyset = \{z\}$. Contradiction. Donc $x = y$ ce qui démontre bien que f est injective.