Révisions d'hiver 11

Pour Jeudi 07/03

Espaces Vectoriels et matrices

Exercice I (S'entrainer)

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on fixe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose

$$F = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}.$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, montrer que $F = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Solution de l'exercice I

1. - Par définition, $F \subseteq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Si $M = 0_n$, alors $A \times 0_3 = 0_3 = 0_3 \times A$ et donc $0_3 \in F$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in F^2$. Alors en posant $P = \lambda M + \mu N$, on a
   $$AP = A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN.$$
   Or $AM = MA$ et $AN = NA$ car M et N sont dans F. Donc
   $$AP = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N) A = PA.$$

2. Il est facile de vérifier que $I_2 \in F$ et que $A \in F$. L'ensemble F étant un espace vectoriel, on en déduit directement que $\text{Vect}(I_2, A) \subseteq F$. Malheureusement, ne connaissant pas la dimension de F, on en peut pas conclure directement. Détaillons donc les éléments de F. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors, on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
M \in F \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a-b \\ c+d & -c-d \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-c = a+b \\ b-d = -a-b \\ a-c = c+d \\ b-d = -c-d \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -c \\ 2b-d = -a \\ a = 2c+d \\ b = -c \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -c \\ -2c-d = -a \\ a = 2c+d \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -c \\ a = 2c+d \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 2c+d & -c \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad M \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$
Par des opérations élémentaires à partir des deux matrices trouvées, on pourrait reconstruire I_2 et A. Mais notons plutôt que l'on vient de trouver une famille génératrice de F de cardinal 2. Donc $\dim(F) \leqslant 2$. Or (I_2, A) forme une famille libre de F. Donc $\dim(F) = 2$. Donc (I_2, A) est une famille libre de F de même cardinal que la dimension de F donc forme une base de F. Par conséquent,
$$F = \text{Vect}(I_2, A).$$
Si $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, montrer que $F = \text{Vect}(I_2, A)$.