Révisions d'hiver 03

Pour Mercredi 27/02

suites et espaces vectoriels

Exercice I (S'entraîner (Suites de Proust généralisées))

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^2$, avec $a + b \neq 1$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$. On pose

$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \right\}.$$

I.1 Donner sans justification la dimension de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

I.2 L'ensemble E est-il un espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

I.3 Déterminer l'ensemble des suites constantes de E.

On pose $F = \left\{ (u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \right\}$.

I.4 Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie.

I.5 Déterminer une base de F en déduire sa dimension.

I.6 Déterminer E.

Exercice II (S'entraîner (Version simplifiée))

On pose

$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + 5 \right\}.$$

II.1 Donner sans justification la dimension de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

II.2 L'ensemble E est-il un espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

II.3 Déterminer l'ensemble des suites constantes de E.

On pose

$$F = \left\{ (u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \right\}$$
$$F' = \left\{ (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \right\}$$

II.4 Montrer proprement que $F = F'$ puis en déduire F.

II.5 Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension finie. Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

II.6 Déterminer E.

Solution de l'exercice I

II.1 L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ est de dimension infinie.

II.2 Puisque $c \neq 0$, on en déduit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $au_{n+1} + bu_n + c = a \times 0 + b \times 0 + c = c \neq u_{n+2} = 0$. Par conséquent la suite nulle n'appartient pas à E qui n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

II.3 Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et $u = (\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u \in E \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \omega = a\omega + b\omega + c \\ &\Leftrightarrow \quad \omega(1-a-b) = c \\ &\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{c}{1-a-b} \qquad \text{car } a+b \neq 1. \end{aligned}$$

On pose $F = \left\{ (u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \right\}$.

II.4 On peut montrer dans un premier temps que F est un sous-espace vectoriel, puis l'on détermine ensuite une base et/ou une famille génératrice finie de F. Ici, montrons directement que F est un sous-espace engendré par une famille finie. Soit $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Par définition, il existe $(u,v) \in E^2$, tel que $w = u - v$. En notant $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+2} &= u_{n+2} - v_{n+2} \\ &= au_{n+1} + bu_n + c - (av_{n+1} + bv_n + c) \qquad \text{car } u \in E \text{ et } v \in E \\ &= a(u_{n+1} - v_{n+1}) + b(u_n - v_n) \\ &= aw_{n+1} + bw_n. \end{aligned}$$

On en déduit alors que la suite w est une suite récurrente linéaire d'ordre deux. Posons

$$F' = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}.$$

On vient donc de montrer que $F \subseteq F'$. Montrons la réciproque. Soit $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F'$, alors on pose $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \omega + w_n \qquad \text{et} \qquad v_n = \omega,$$

où $\omega = \frac{c}{1-a-b}$ est le point fixe de l'équation précédemment déterminé. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+2} = \omega + w_{n+2} &= a\omega + b\omega + c + w_{n+2} \qquad \text{car } \omega \text{ est un point fixe de la relation de récurrence de } E \\ &= a\omega + b\omega + c + aw_{n+1} + bw_n \qquad \text{car } w \in F' \\ &= a(\omega + w_{n+1}) + b(\omega + w_n) + c \\ &= au_{n+1} + bu_n + c. \end{aligned}$$

Donc $u \in E$. D'après la question I.2, on sait aussi que $v \in E$. Or $w = u - v$ donc $w \in F$. Finalement on a aussi, $F' \subseteq F$. Ainsi

$$F = F' = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}.$$

Soit Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$. Trois cas se présentent :

- **Premier cas $\Delta > 0$.** Dans ce cas, il existe deux racines réelles r_1 et r_2 distinctes telles que

$$F = \operatorname{Vect}\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \right).$$

  Donc F est un espace engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- **Deuxième cas $\Delta = 0$.** Dans ce cas, en notant r_0 la racine double, on a

$$F = \operatorname{Vect}\left((r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \right).$$

  Et donc F est encore un espace vectoriel de dimension finie.
- **Troisième cas $\Delta < 0$.** Dans ce cas, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ telles que

$$F = \operatorname{Vect}\left((r^n \cos(\theta n))_{n\in\mathbb{N}}, (r^n \cos(\theta n))_{n\in\mathbb{N}} \right).$$

  Et donc F est encore un espace vectoriel de dimension finie.

II.5 Montrons que dans chaque cas, la famille obtenue est une base de F.

- **Premier cas $\Delta > 0$.** Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda r_1^n + \mu r_2^n = 0$. Alors pour $n = 0$, on obtient $\lambda + \mu = 0$ i.e. $\mu = -\lambda$. Puis pour $n = 1$, $\lambda r_1 + \mu r_2 = \lambda r_1 - \lambda r_2 = \lambda (r_1 - r_2) = 0$. Or $r_1 \neq r_2$ donc $\lambda = 0$ et donc $\mu = 0$. Ainsi la famille $\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une famille libre qui engendre F. C'est donc une base de F contenant deux vecteurs et donc F est de dimension 2.
- **Deuxième cas $\Delta = 0$.** On suppose $b \neq 0$ (sinon la suite est récurrente d'ordre 1) cela implique que 0 n'est pas racine et donc $r_0 \neq 0$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda r_0^n + n\mu r_0^n = 0$. Pour $n = 0$, on obtient $\lambda = 0$ puis pour $n = 1$, $\mu r_0 = 0$ et comme $r_0 \neq 0$, on en déduit que $\mu = 0$, donc $\left((r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ et forme donc une base de F qui est à nouveau de dimension 2.
- **Troisième cas $\Delta < 0$.** Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda r^n \cos(\theta n) + \mu r^n \sin(\theta n) = 0$. Pour $n = 0$, on obtient $\lambda = 0$ puis pour $n = 1$, $\mu r \sin(\theta) = 0$. Puisque les solutions sont complexes conjugués et non réelles, leurs arguments sont différents de $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ et donc $\sin(\theta) \neq 0$ et comme $r \neq 0$ (les solutions ne sont pas réelles et donc le module est non nul) on en déduit que $\mu = 0$. Ainsi, la famille $\left((r^n \cos(\theta n))_{n\in\mathbb{N}}, (r^n \cos(\theta n))_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est libre, forme une base de F qui est donc de dimension 2.

II.6 Posons $\Omega = (\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = \left\{\Omega + w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, w \in F\right\}$. Montrons que $E = G$ autrement dit E est un espace affine de direction F. Soit $u \in E$. Puisque $\Omega \in E$, par définition de F, on a $u - \Omega \in F$ et donc $u \in G$. Réciproquement si $u \in G$, alors il existe $w \in F$ tel que $u = \Omega + w$ alors comme précédemment pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+2} = \omega + w_{n+2} = a\omega + b\omega + c + aw_{n+1} + bw_n = a(\omega + w_{n+1}) + b(\omega + w_n) + c = au_{n+1} + bu_n + c$$

et donc $u \in E$. Conclusion,

$$E = \left\{\Omega + w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, w \in F\right\} = \Omega + F.$$

Solution de l'exercice II

On pose

$$E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + 5\right\}.$$

II.1 L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ est de dimension infinie.

II.2 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + 2u_n + 5 = 5 \neq u_{n+2} = 0$. Par conséquent la suite nulle n'appartient pas à E qui n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

II.3 Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et $\Omega = (\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante. On a les équivalences suivantes :

$$\Omega \in E \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \omega = \omega + 2\omega + 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = -\frac{5}{2}.$$

Donc la suite $\left(-\frac{5}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la seule suite constante appartenant à E.

On pose

$$F = \left\{(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E\right\}$$
$$F' = \left\{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\right\}$$

II.4 Soit $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Par définition, il existe $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E telles que $w = u - v$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= u_{n+2} - v_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + 5 - (v_{n+1} + 2v_n + 5) \qquad \text{car } u \in E \text{ et } v \in E \\ &= u_{n+1} - v_{n+1} + 2(u_n - v_n) \\ &= w_{n+1} + 2w_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, $w \in F'$ et donc $F \subseteq F'$. Montrons la réciproque. Soit $w \in F'$ et posons $\Omega = \left(-\frac{5}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = w + \Omega$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = w_{n+2} - \frac{5}{2} = w_{n+1} + 2w_n - \frac{5}{2} = u_{n+1} + \frac{5}{2} + 2\left(u_n + \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2} = u_{n+1} - u_n + 5.$$

Ainsi, $u \in E$. Or $\Omega \in E$ et $w = u - \Omega$. Par conséquent $w \in F$ et donc $F' \subseteq F$. Ainsi : $F = F'$. Or F' est un ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Considérons l'équation caractéristique associée :

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

Soit Δ le discriminant associé : on a $\Delta = 1+8 = 9$. Les racines associées sont donc $r_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ et $r_2 = \frac{1-3}{2} = -1$. Donc d'après le cours,

$$F = F' = \left\{ \left(\lambda\, 2^n + \mu\,(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

II.5 De la dernière égalité, on en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ engendré par une famille finie $\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ et est donc de dimension finie. Montrons que la famille $\mathscr{B} = \left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est libre. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, tel que $\lambda\,(2^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\,((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$. Notamment pour $n=0$ et $n=1$, on en déduit

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\,\lambda - \mu = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3\,\lambda = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2\,\lambda - \mu = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Ainsi la famille $\mathscr{B}$ est une famille libre engendrant F et constitue donc une base de F. Donc $\dim(F) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 2$.

II.6 Posons $\Omega = \left(-\frac{5}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $E' = \{\,\Omega + w \in \mathbb{R}^n \mid w \in F\,\}$. Montrons que $E = E'$. Soit $u\in E$. Puisque $\Omega\in E$, par définition de F, on en déduit que $u - \Omega \in F$. Donc il existe $w\in F$ tel que $u - \Omega = w$ i.e. $u = \Omega + w$ avec $w\in F$. Donc $u\in E'$. Donc $E\subseteq E'$. Réciproquement, soit $u\in E'$ alors il existe $w\in F$ tel que $u = \Omega + w$. Notons $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+2} = -\frac{5}{2} + w_{n+2} &= -\frac{5}{2} + w_{n+1} + 2w_n && \text{car } w\in F = F' \\ &= -\frac{5}{2} + u_{n+1} + \frac{5}{2} + 2\left(u_n + \frac{5}{2}\right) \\ &= u_{n+1} + 2u_n + 5. \end{aligned}$$

Donc $u\in E$ et $E'\subseteq E$. Finalement, $E = E' = \Omega + F = \Omega + \mathrm{Vect}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.