Révisions d'hiver 04

Pour Jeudi 28/02

fonctions

Exercice I (S'entraîner)

Soient $n \geqslant 3$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $f_n : x \mapsto x^n + \alpha x + \beta$. On souhaite montrer que f_n s'annule au plus trois fois sur $\mathbb{R}$.

I.1 Quel est $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f_n ? Quelle est la régularité de f_n sur son ensemble de définition (dérivable ? $\mathscr{C}^1$? $\mathscr{C}^2$? … $\mathscr{C}^\infty$?) ?

I.2 Calculer la dérivée de f_n sur son domaine de dérivabilité.

On suppose n pair, $n \geqslant 3$.

I.3 Déterminer les limites de f_n aux bornes de son domaine.

I.4 Justifier que la fonction $g_n : x \mapsto x^{n-1}$ est une bijection sur des ensembles à préciser. Quelle est sa monotonie ?

I.5 En déduire le tableau de variation de f_n' puis celui de f_n.

I.6 Conclure dans ce cas.

On suppose maintenant n impair, $n \geqslant 3$.

I.7 Déterminer les limites de f_n aux bornes de son domaine.

I.8 Si $\alpha \geqslant 0$ montrer que f_n' est de signe constant et en déduire le tableau de variation de f_n puis conclure.

I.9 Si $\alpha < 0$,

(a) déterminer les solutions de l'inéquation

$$x^{n-1} \geqslant -\frac{\alpha}{n}. \tag{E}$$

(b) En déduire le tableau de signe de f_n' puis le tableau de variation de f_n.

(c) Conclure

Solution de l'exercice I

I.1 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. La fonction f_n est polynomiale et donc est définie et même $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

I.2 De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $n \geqslant 1$, on a

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + \alpha.$$

On suppose n pair, $n \geqslant 3$.

I.3 Puisque $n > 1$, on sait que $f_n(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^n$. Et puisque n est pair, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty.$$

I.4 L'entier n est pair et donc l'entier $n-1 \geqslant 2$ est impair. On en déduit que la fonction $g_n : x \mapsto x^{n-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ et comme $n-1 \geqslant 1$, $g_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Par le théorème de la bijection, on en déduit que g_n définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (dont la réciproque est strictement croissante et continue). Précisons à nouveau que la fonction g_n est strictement croissante.

I.5 Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_n'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad nx^{n-1} + \alpha \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_n(x) = x^{n-1} \geqslant -\frac{\alpha}{n} \quad \text{car } n > 0.$$

D'après la question précédente, $g_n(x) = -\frac{\alpha}{n}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Notons γ_n cette solution. Par la croissance de g_n on obtient :

x	$-\infty$		γ_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$x \mapsto f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

I.6 Ainsi dans ce cas, la fonction f_n admet d'après le tableau précédent, zéro ou deux valeur(s) d'annulation et donc au plus trois valeurs d'annulation.

On suppose maintenant n impair, $n \geqslant 3$.

I.7 De même que précédemment, on a $f_n(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^n$. Comme n est impair, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty.$$

I.8 On suppose $\alpha \geqslant 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On reprend l'équation précédente, $f_n'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^{n-1} \geqslant -\frac{\alpha}{n}$. Or $\alpha \geqslant 0 \quad \Rightarrow -\frac{\alpha}{n} \leqslant 0$. Comme $n-1$ est pair, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^{n-1} \geqslant 0 \geqslant -\frac{\alpha}{n}$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) \geqslant 0$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$x \mapsto f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit dans ce cas que f_n possède une unique valeur d'annulation (et donc moins que trois).

I.9 Si $\alpha < 0$,

(a) Comme $\alpha < 0$, on en déduit que $-\frac{\alpha}{n} > 0$. Soit $x > 0$, on a alors

$$\begin{array}{rcll} (E) & \Leftrightarrow & \ln\left(x^{n-1}\right) \geqslant \ln\left(-\dfrac{\alpha}{n}\right) & \text{car les termes sont stricement positifs} \\ & \Leftrightarrow & (n-1)\ln(x) \geqslant \ln\left(-\dfrac{\alpha}{n}\right) & \\ & \Leftrightarrow & \ln(x) \geqslant \dfrac{1}{n-1}\ln\left(-\dfrac{\alpha}{n}\right) & \text{car } n-1>0 \\ & \Leftrightarrow & x \geqslant \left(-\dfrac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}. & \end{array}$$

On en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$: $\mathscr{S}_+ = \left[\left(-\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}};+\infty\right[$. Or $n-1$ est pair et donc $x \mapsto x^{n-1}$ est pair. On en déduit que les solutions de (E) sont

$$\mathscr{S} = \left]-\infty;\left(-\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right] \cup \left[\left(-\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}};+\infty\right[.$$

(b) On pose $a_n = \left(-\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} > 0$. On a alors

x	$-\infty$		$-a_n$		a_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x \mapsto f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

(c) D'après le tableau de variation précédent, on en déduit que dans ce cas, f_n admet une ou trois valeurs d'annulation.

Dans tous les cas, f_n admet au plus trois valeurs d'annulation.