Révisions d'hiver 05

Pour Vendredi 01/03

Matrices et espaces vectoriels

Exercice I (Restituer)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition suffisante sur P pour que l'équivalence suivante soit vérifiée :

$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad PA = PB.$$

Exercice II (S'entraîner - exemple 18, chapitre 17)

II.1 Montrer que $\mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $\mathrm{Vect}((1,2,3))$ sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

II.2 Montrer que $F = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = P(2) = 0 \}$ et $G = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(-1) = 0 \}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

II.3 (a) Montrer que $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Montrer que $F = \{ f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \}$ et $G = \{ f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f' = 0 \}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution de l'exercice I

Il est clair tout d'abord que l'implication « $A = B \quad PA = PB$ » est vraie pour tout $(A, B, P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^3$. Cependant la réciproque n'est pas toujours vraie. On pense notamment que si $P = 0_n$ et si $A \neq B$ alors $PA = 0_n = 0_n = PB$ n'implique pas en effet que $A = B$. Mais de façon plus subtile même si $P \neq 0_n$ la réciproque n'est pas forcément assurée. En effet, si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad B = I_3.$$

Alors on a bien $PA = P = PB$ et pourtant $A \neq B$. Cependant si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, est inversible alors l'équivalence est vraie. On a déjà vu que l'implication directe était vraie. Montrons alors la réciproque. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$PA = PB \qquad \Rightarrow \qquad P^{-1}PA = P^{-1}PB \qquad \Rightarrow \qquad A + B.$$

Cela ne parait pas compliqué mais pensez à justifier que P est inversible avant d'écrire une équivalence ou une simplification sur un produit matriciel !

Solution de l'exercice II

II.1 Soit $u \in \mathrm{Vect}((1,1,1)) \cap \mathrm{Vect}((1,2,3))$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad u = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 2\mu \\ 3\mu \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda = \mu \\ \lambda = 2\mu = 2\,\lambda \\ \lambda = 3\mu = 3\,\lambda \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda = \mu \\ \lambda = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \mu = 0.$$

Donc $u = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi on a montré que $\mathrm{Vect}((1,1,1)) \cap \mathrm{Vect}((1,2,3)) \subseteq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. L'inclusion étant vraie puisque l'on considère l'intersection de deux sous-espaces vectoriels, on en déduit que $\mathrm{Vect}((1,1,1)) \cap \mathrm{Vect}((1,2,3)) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et par conséquent $\mathrm{Vect}((1,1,1)) \cap \mathrm{Vect}((1,2,3))$ sont en somme directe.

Cependant, $\dim(\mathrm{Vect}((1,1,1))) = 1$ (car le vecteur est non nul), $\dim(\mathrm{Vect}((1,2,3))) = 1$ (même argument) et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \neq 1 + 1$. Donc les deux sous-espaces considérés ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

II.2 Soit $P \in F \cap G$, alors $P(1) = P(2) = P(-1) = 0$. Donc P est un polynôme de degré au plus 2 avec trois racines. Donc $P = 0$. Donc $F \cap G \subseteq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$. Or (on admet ici que) F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$ donc l'inclusion réciproque est aussi vraie. Par conséquent, $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ et F et G sont en somme directe. De plus,

$$F = \left\{ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Soit $\mathscr{S}$ le système d'inconnu $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\mathscr{S} \quad : \quad \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases}$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \mathscr{S} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 & +a_1 & +a_2 & = 0 \\ & +a_1 & +3a_2 & = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = -a_1 - a_2 \\ a_1 = -3a_2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 3a_2 - a_2 = 2a_2 \\ a_1 = -3a_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Par suite,
$$F = \left\{ P = 2a_2 - 3a_2X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(2 - 3X + X^2\right).$$
De la même façon, on a
$$\begin{aligned} G &= \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_0 - a_1 + a_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ P = a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ P = a_1(X+1) + a_2\left(X^2 - 1\right) \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(X+1,\ X^2 - 1\right). \end{aligned}$$
On en déduit que $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 2$. Donc $\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Comme l'on sait déjà que F et G sont en somme directe, on en déduit que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

II.3 (a) Soit $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

- Par définition, $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- La fonction nulle sur $\mathbb{R}$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et notamment dérivable. Donc $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$. Alors on sait d'après le cours que la fonction $h = \lambda f + \mu g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et on a même une formule pour sa dérivée). Donc $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Soit $f \in F \cap G$. Puisque $f \in G$, on sait que $f' = 0$ autrement dit que f' est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Donc f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$:
$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = C.$$
Or $f \in F$ donc notamment $f(0) = C = 0$. Finalement f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, $f = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Ainsi $F \cap G \subseteq \left\{0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\}$. Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels (vérification laissée au lecteur), on en déduit que l'inclusion réciproque est aussi vraie et donc $F \cap G = \left\{0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\}$. Donc F et G sont en somme directe.

On admet que $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie (tout comme F) il nous est impossible d'utiliser un argument de dimension pour conclure. Montrons donc que $F + G = \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par analyse-synthèse. *Analyse :* Soit $h \in F + G$ alors il existe $f \in F$ et $g \in G$ telle que $h = f + g$. Puisque $g \in G$, on en déduit que $g' = 0$ ou encore que g est une fonction constante : il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C$. En évaluant en 0, on obtient
$$h(0) = f(0) + g(0) = g(0) = C \qquad\qquad \text{car } f \in F.$$
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = h(0)$ et donc $f(x) = h(x) - h(0)$, ce qui détermine de façon unique f et g (et redémontre au passage le fait que F et G sont en somme directe).

Synthèse : Soit $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose g et f les fonctions définies respectivement pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = h(0)$ et $f(x) = h(x) - h(0)$. Il est clair que ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et d'une part pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$ et d'autre part $f(0) = h(0) - h(0) = 0$. Par conséquent, on a $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Ainsi $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq F + G$. L'inclusion réciproque est vraie car F et G sont des sous-ensembles de $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a donc $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F + G$. Or ces deux espaces sont en somme directe. Conclusion, F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.