Révisions d'hiver 07

Pour Dimanche 03/03

Espaces vectoriels

Exercice I (S'entrainer)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Démontrer rigoureusement l'équivalence suivante :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} 1)\ F \subseteq E \\ 2)\ F \neq \emptyset \\ 3)\ \forall (x,y) \in F^2, \quad x - y \in F \\ 4)\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \quad \lambda\, x \in F. \end{cases}$$

Solution de l'exercice I

Procédons par double implication. Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E. Alors par la caractérisation des sous-espaces vectoriels,

(i) $F \subseteq E$

(ii) $0_E \in F$

(iii) $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x,y) \in F^2, \qquad \lambda\, x + \mu y \in F.$

- Le point (i) implique le point 1).
- Le point (ii) implique que F possède au moins un vecteur (le vecteur nul en particulier). Donc F est non vide et le point 2) est vérifié.
- Soit $(x,y) \in F^2$. D'après le point (iii) avec $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, on obtient que

  $$\lambda\, x + \mu y = x - y \in F.$$

  Donc 3) est vérifié.
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in F$. Alors par le point (iii) avec $\mu = 0$ et $y = 0_E \in F$, on obtient

  $$\lambda\, x + \mu y = \lambda\, x \in F.$$

  et donc le point 4) est vérifié.

Ainsi l'implication directe $\Rightarrow$ est démontrée.
Démontrons la réciproque. Supposons 1), 2), 3) et 4) et démontrons alors que ((i)), ((ii)) et ((iii)) sont vérifiés.

- Le point 1) implique directement le point (i).
- Le point 2) implique que F est non vide. Il existe donc un vecteur $x_0 \in E$ tel que $x_0 \in F$. Donc d'après le point 3), avec $x = y = x_0$, on obtient alors

  $$x - y = x_0 - x_0 = 0_E \in E.$$

  et donc (ii) est vérifié.

  On aurait aussi pu utiliser le point 4) avec $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ et $x = x_0$.
- Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x,y) \in F^2$. Par le point 4) on a alors $\lambda\, x \in F$ mais aussi $-\mu y \in F$ (on applique 4) avec $\lambda = -\mu \in \mathbb{K}$ et $x = y \in F$). Donc par 3),

  $$\lambda\, x - (-\mu y) = \lambda\, x + \mu y \in F$$

  ce qui démontre bien le point (iii).

Nous avons donc bien démontré l'implication réciproque.
Par conséquence, l'équivalence est bien vérifiée.