Révisions d'hiver 08

Pour Lundi 04/03

Continuité, dérivabilité

Exercice I (S'entrainer)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice I

1. En tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit directement que f est continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la continuité en 0. On sait que $f(0) = 1$. Calculons la limite quand $x \to 0$, $x \neq 0$. On a les égalités asymptotiques suivantes :
$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x).$$
Donc
$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$
Par quotient d'équivalents, on obtient que
$$f(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$
Autrement dit
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1 = f(0).$$
Donc la fonction f est continue en 0.
Conclusion : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
NB : on pouvait reconnaitre le taux d'accroissement de la fonction exponentielle pour dire que $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \to \exp'(0) = 1$ *quand* $x \to 0$ *et que par passage à l'inverse,* $f(x) \to 1$ *quand* $x \to 0$.
2. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonction $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Etudions le comportement de f en 0. On souhaite appliquer le théorème de prolongement de fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a de plus
   $$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(1-x) - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}.$$
   Or
   $$\begin{aligned}\mathrm{e}^x(1-x) - 1 &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)(1-x) - 1\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - x - x^2 + o\left(x^2\right) - 1\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).\end{aligned}$$
   Donc
   $$\mathrm{e}^x(1-x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$
   De plus $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et donc par élévation au carré $(\mathrm{e}^x - 1)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Ainsi par quotient d'équivalents,
   $$f'(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$
   Autrement dit $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe et vaut $-1/2$.

   Des deux points précédents, on en déduit à l'aide du théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, que f est $\mathscr{C}^1$ en 0 et de plus $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
   La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.