Révisions d'hiver 09

Pour Mardi 05/03

Espaces vectoriels

Exercice I (S'entrainer)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (1, 1, -1)$, $u_3 = (-1, -5, 7)$. On définit également

$$E = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3)$$
$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}.$$

1. Déterminer la dimension de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de F.
3. Déterminer une base et la dimension de $E \cap F$. Les espaces E et F sont-ils en somme directe ?
4. Sans trop de calcul, montrer que $E + F = \mathbb{R}^3$.

Solution de l'exercice I

1. On peut effectuer des opérations élémentaires sur une famille sans changer l'espace engendré. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
E &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-5\\7\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-6\\9\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l}C_2 \leftarrow C_2 - C_1\\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1\end{array}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) && C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

   La famille de vecteur $(v_1 = (1,-1,2)\,, v_2 = (0,2,-3))$ est libre car échelonnée sur ses coordonnées et est génératrice de E donc forme une base de E. Ainsi E est de dimension 2.

2. On a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
F &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x=-y-z\right\}\\
&= \left\{(-y-z,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \left\{y(1,-1,0)+z(1,0,-1)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

   Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus $w_1 = (1,-1,0)$ et $w_2 = (1,0,-1)$ ne sont pas colinéaires. Donc (v_1, v_2) est libre et forme une base de F et F est de dimension 2.

3. Soit $u \in E \cap F$. Puisque $u \in E$, il existe (λ, μ) tel que

$$u = \lambda\, v_1 + \mu v_2 = \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ -\lambda+2\mu\\ 2\lambda-3\mu\end{pmatrix}.$$

   D'autre part, $u \in F$. Par conséquent, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$= \alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ -\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}.$$

   Ainsi, on a les implications suivantes

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\lambda\\ -\lambda+2\mu\\ 2\lambda-3\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ -\alpha\\ -\beta\end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases}\lambda = \alpha+\beta\\ -\lambda+2\mu = -\alpha\\ 2\lambda-3\mu = -\beta\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases}\lambda = \alpha+\beta\\ \alpha = \lambda-2\mu\\ \beta = -2\lambda+3\mu\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases}\lambda = \lambda-2\mu-2\lambda+3\mu = \mu-\lambda\\ \alpha = \lambda-2\mu\\ \beta = -2\lambda+3\mu\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases}\mu = 2\lambda\\ \alpha = \lambda-2\mu = -3\lambda\\ \beta = -2\lambda+3\mu = 4\lambda\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient que

$$u = \lambda\, v_1 + \mu v_2 = \lambda\, v_1 + 2\,\lambda\, v_2 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\,\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 3\,\lambda \\ -4\,\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $E \cap F \subseteq \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, à l'aide des relations établies précédemment, (en prenant $\lambda = 1$) on a $(1, 3, -4) = (1, -1, 2) + 2\,(0, 2, -3) \in E$ et $(1, 3, -4) = -3\,(1, -1, 0) + 4\,(1, 0, -1) \in F$. Donc $(1, 2, -4) \in E \cap F$ et comme $E \cap F$ est un espace vectoriel, on en déduit que $\mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \subseteq E \cap F$. Finalement,

$$E \cap F = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $E \cap F$ est de dimension 1 (et donc non réduit à $\{0\}$) et donc E et F ne sont pas en somme directe.

4. A l'aide des questions précédentes et de la formule de Grassman,

$$\dim (E + F) = \dim (E) + \dim (F) - \dim (E \cap F) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Or par définition $E + F \subseteq \mathbb{R}^3$. Comme $\dim \left(\mathbb{R}^3\right) = 3 = \dim (E + F)$, on en déduit que $E + F = \mathbb{R}^3$.