Révisions de Juin 01

Pour Lundi 27/05

Représentation matricielle

Exercice I

Soit $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto A_0 M$.

1. Déterminer A la matrice de f dans la base canonique.
2. Calculer le rang de f, son noyau, son image.
3. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \neq \left\{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$.
4. En déduire une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice II

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, telle que $f(1) = 1 + X^2$, $f(X) = -X(1+X)$ et $f\left(X^2\right) = 1 - X$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer le rang, l'image et le noyau de f.
3. Montrer que $\mathscr{B} = \left(1 + X - X^2, 1 + X^2, X + X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
4. Calculer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Solution de l'exercice 1

1. Soit $\mathscr{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
f(E_{11}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} + 2E_{21}, \\
f(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E_{12} + 2E_{22}, \\
f(E_{21}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + 3E_{21}, \\
f(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_{12} + 3E_{22}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{A = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

2. Par opérations élémentaires sur les lignes, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

On constate que $\operatorname{rg}(f) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ et f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc f est un automorphisme. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) = 4, \qquad \operatorname{Ker}(f) = \left\{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right\}, \qquad \operatorname{Im}(f) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(M) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$. On a alors les équivalences suivantes :

$$M \in \mathrm{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\left(A - \lambda\,\mathrm{Id}_4\right)$$

car $A - \lambda\,\mathrm{Id}_4 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
M \in \mathrm{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \quad&\Leftrightarrow\quad (A - \lambda\,\mathrm{Id}_4)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4} \\
&\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (2-\lambda)\,x + z = 0 \\ (2-\lambda)\,y + t = 0 \\ 2x + (3-\lambda)\,z = 0 \\ 2y + (3-\lambda)\,t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases} z = (\lambda-2)\,x \\ t = (\lambda-2)\,y \\ 2x + (3-\lambda)(\lambda-2)\,x = 0 \\ 2y + (3-\lambda)(\lambda-2)\,y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases} z = (\lambda-2)\,x \\ t = (\lambda-2)\,y \\ \left(\lambda^2-5\lambda+4\right)x = 0 \\ \left(\lambda^2-5\lambda+4\right)y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases} z = (\lambda-2)\,x \\ t = (\lambda-2)\,y \\ (\lambda-1)(\lambda-4)\,x = 0 \\ (\lambda-1)(\lambda-4)\,y = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

- Premier cas, $\lambda \notin \{1,4\}$. Alors,
$$M \in\in \mathrm{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \quad\Leftrightarrow\quad x=y=z=t=0 \quad\Leftrightarrow\quad M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}.$$
Donc $\mathrm{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) = \left\{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$.
- Deuxième cas, $\lambda = 1$. Alors,
$$M \in\in \mathrm{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad M = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Donc $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$.
- Troisième cas, $\lambda = 4$. Alors,
$$M \in\in \mathrm{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} z = 2x \\ t = 2y \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad M = \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Donc $\mathrm{Ker}\left(f - 4\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$. Conclusion, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \neq \left\{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda \in \{1,4\}.}$$

4. Posons $E_1 = \operatorname{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right)$ et $E_4 = \operatorname{Ker}\left(f - 4\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right)$. Montrons que E_1 et E_4 sont supplémentaires. D'une part, on a, d'après la question précédente,

$$E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

Donc E_1 est engendré par deux matrices non colinéaires donc $\mathscr{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E_1 et par conséquent $\dim(E_1) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_1) = 2$. De même,

$$E_4 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

et $\mathscr{B}_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de deux matrices non colinéaires engendrant E_4 et forme dont une base de E_4. Donc $\dim(E_4) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_4) = 2$.
Ainsi, $\dim(E_1) + \dim(E_4) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ (i).
D'autre part, soit $M \in E_1 \cap E_4$. Alors par définition de ces espaces, $f(M) = M$ et $f(M) = 4M$ donc $4M = M$ i.e. $M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$. Donc $E_1 \cap E_4 \subseteq \left\{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$. L'inclusion réciproque étant assurée par le fait que $E_1 \cap E_4$ est un espace vectoriel, on en déduit que $E_1 \cap E_4 = \left\{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$. Autrement dit E_1 et E_2 sont en somme directe (ii).
Par (i) et (ii), on en déduit que $E_1 \oplus E_4 = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Or $\mathscr{B}_1$ est une base de E_1 et $\mathscr{B}_4$ est une base de E_4. Donc par le théorème de concaténation des bases d'espaces supplémentaires, on obtient que

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est un base de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Calculons alors la matrice de f dans cette base. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Alors $e_1 \in \mathscr{B}_1 \subseteq E_1$. Donc $f(e_1) = e_1$. De même $f(e_2) = e_2$. De plus $e_3 \in \mathscr{B}_4 \subseteq E_4$ donc $f(e_3) = 4e_3$ et de même $f(e_4) = 4e_4$. Conclusion, on obtient la matrice diagonale suivante :

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

Si vous avez compris cet exercice, vous avez tout compris à la diagonalisation (chapitre de PT) !