Révisions de Noël 03 Correction

De Vendredi 28/12

I Question de cours

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Si de plus $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

II S'entraîner

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II.1 En appliquant l'algorithme de Gauss, on a

$$\begin{aligned}
P \underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2.
\end{aligned}$$

On obtient une matrice échelonnée avec trois pivots.

En conséquence, on a $\mathrm{rg}(P) = 3$. Or P est une matrice carrée de taille 3, donc P est inversible.

II.2 Poursuivons nos calculs précédent pour déterminer la réduite de P :

$$P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3.$$

Appliquons alors cette séries d'opérations élémentaires en lignes à la matrice identité :

$$\begin{aligned}
I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3.
\end{aligned}$$

La matrice obtenue est alors P^{-1} (vérifiez-le en calculant Pp^{-1}, moi je l'ai fait)

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

II.3 On a les calculs suivants.

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{et la matrice } D \text{ est une matrice diagonale } D \in \mathscr{D}_3(\mathbb{R}).}$

On appelle centre de A ou commutant de A l'ensemble des matrices qui commutent avec A :

$$Z(A) = \{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}.$$

II.4 En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} l'égalité $P^{-1}AP = D$, on obtient que $PDP^{-1} = A$, Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$M \in Z(A) \quad \Leftrightarrow \quad AM = MA \quad \Leftrightarrow \quad PDP^{-1}M = MPDP^{-1}.$$

En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, on obtient

$$M \in Z(A) \quad \Leftrightarrow \quad DP^{-1}MP = P^{-1}MPD.$$

En posant $N = P^{-1}MP$, on en déduit que $\boxed{M \in Z(A) \Leftrightarrow DN = ND \Leftrightarrow N \in Z(D)}$.

II.5 Posons $N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} N \in Z(D) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 4a_{13} \\ 0 & a_{22} & 4a_{23} \\ 0 & a_{32} & 4a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 4a_{32} & 4a_{33} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0 \\ a_{22} = a_{22} \\ 4a_{23} = a_{23} \\ 4a_{32} = 4a_{32} \\ 4a_{33} = a_{33} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{Z(D) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathscr{D}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

II.6 Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Des questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}
M \in Z(A) \quad & \underset{II.4}{\Leftrightarrow} \quad N = PMP^{-1} \in Z(D) \\
& \underset{II.5}{\Leftrightarrow} \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad N = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad M = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} P \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2\lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad M = \begin{pmatrix} 2\lambda & \mu & \lambda \\ 0 & \mu & 0 \\ -2\lambda & -2\mu & -\lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{Z(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda & \mu & \lambda \\ 0 & \mu & 0 \\ -2\lambda & -2\mu & -\lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$