Révisions de Noël 04 Correction

Du samedi 29/12

Solution de l'exercice I

Savoir manipuler les images réciproques.

1. Soient $f : x \mapsto x^2 + 4x + 9$ et $A = [4; 14]$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x+2)^2 + 5.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leqslant f(x) \leqslant 14 \quad & \Leftrightarrow \quad 4 \leqslant (x+2)^2 + 5 \leqslant 14 \\ & \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant (x+2)^2 \leqslant 9 \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (x+2)^2 \leqslant 9 \\ & \Leftrightarrow \quad -3 \leqslant x+2 \leqslant 3 \\ & \Leftrightarrow \quad -5 \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } f^{-1}(A) = [-5; 1].}$

2. Soient $f : x \mapsto \arccos(\sin(x))$ et $A = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \in [-1; 1]$ et la fonction arccosinus est définie sur $[-1; 1]$. Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x \in f^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} \leqslant \arccos(\sin(x)) \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \sin(x) \leqslant \sqrt{2}2,$$

car la fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1; 1]$ et en particulier de $[0; \sqrt{2}2]$ dans $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi,

$$x \in f^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right] \right)$$

et donc

$$\boxed{f^{-1}(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right] \right).}$$

3. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f : x \mapsto a^x$ et $A = [-5; 5]$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leqslant a^x \leqslant 5 \quad & \Leftrightarrow \quad -5 \leqslant e^{x \ln(a)} \leqslant 5 \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant e^{x \ln(a)} \leqslant 5 \\ & \Leftrightarrow \quad x \ln(a) \leqslant \ln(5). \end{aligned}$$

Si $a < 1$ alors $x \ln(a) \leqslant \ln(5) \Leftrightarrow x \geqslant \frac{\ln(5)}{\ln(a)} = \log_a(5)$. Donc $f^{-1}(A) = [\log_a(5); +\infty[$.
Si $a = 1$, alors $x \ln(a) \leqslant \ln(5)$ est toujours vraie et donc $f^{-1}(A) = \mathbb{R}$.
Si $a > 1$ alors $x \ln(a) \leqslant \ln(5) \Leftrightarrow x \leqslant \frac{\ln(5)}{\ln(a)} = \log_a(5)$. Donc $f^{-1}(A) =]-\infty; \log_a(5)]$.
Conclusion :

$$\boxed{f^{-1}(A) = \begin{cases} [\log_a(5); +\infty[& \text{si } a < 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } a = 1 \\ ]-\infty; \log_a(5)] & \text{si } a > 1 \end{cases}.}$$

Solution de l'exercice II

On pose $I = \displaystyle\int_{-3/4}^{3/4} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \geqslant 1 > 0$ et donc la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$. Donc l'intégrale I existe. On pose $x = \mathrm{sh}(t)$ on a alors $\mathrm{d}x = \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$ et

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(t)+1}} = \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(t)}} = \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}(t)},$$

car la fonction cosinus hyperbolique est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Il nous reste donc qu'à résoudre les équations $\frac{3}{4} = \mathrm{sh}(t)$ et $-\frac{3}{4} = \mathrm{sh}(t)$ pour effectuer le changement de variables. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $X = \mathrm{e}^t$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(t) = \frac{3}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = \frac{3}{4} \quad &&\Leftrightarrow \quad \frac{X - \frac{1}{X}}{2} = \frac{3}{4} \\
& &&\Leftrightarrow \quad X - \frac{1}{X} = \frac{3}{2} \\
& &&\Leftrightarrow \quad X^2 - \frac{3}{2}X - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé à cette équation. $\Delta = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$. Donc

$$\mathrm{sh}(t) = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad X = \frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{2} = 2.$$

Or $X = \mathrm{e}^t > 0$, donc

$$\mathrm{sh}(t) = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^t = X = 2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \ln(2).$$

De plus la fonction sh est impaire donc du fait que $\mathrm{sh}\left(\ln(2)\right) = \frac{3}{4}$, on en déduit également que $\mathrm{sh}\left(-\ln(2)\right) = -\frac{3}{4}$. De par toutes ces considérations, on obtient que

$$I = \int_{-3/4}^{3/4} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

On linéarise $\mathrm{sh}^2(t)$ ou bien par une formule directe (de la formule $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, on en déduit que $(i\,\mathrm{sh}(t))^2 = \frac{1-\mathrm{ch}(2t)}{2}$ i.e. $\mathrm{sh}^2(t) = \frac{\mathrm{ch}(2t)-1}{2}$) ou bien on redémontre la formule en développant. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{sh}^2(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t} - 2}{4} = \frac{\mathrm{ch}(2t) - 1}{2}.$$

Par conséquent,

$$I = \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \frac{\mathrm{ch}(2t) - 1}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{sh}(2t)}{4} - \frac{t}{2}\right]_{t=-\ln(2)}^{t=\ln(2)} = \frac{\mathrm{sh}(2\ln(2))}{4} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\mathrm{sh}(-2\ln(2))}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Par imparité du sinus hyperbolique,

$$I = \frac{\mathrm{sh}(\ln(4))}{2} - \ln(2) = \frac{4 - \frac{1}{4}}{4} - \ln(2) = \frac{15}{16} - \ln(2).$$

Conclusion

$$\boxed{I = \frac{15}{16} - \ln(2).}$$

Notez que par parité de $t \mapsto \mathrm{sh}^2(t)$, on pouvait remarquer que $I = \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\ln(2)} \mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{d}t$.