Révisions de Noël 08 Correction

Du vendredi 04/01

I Question 6 de l'interrogation d'entrainement 11

Calcul dans $\mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inégalités suivantes.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
& |3x-12| \leqslant |7x+2| \\
\Leftrightarrow\ & (|3x-12| \leqslant 7x+2 \quad \text{ET} \quad 7x+2 \geqslant 0) \quad \text{OU} \quad (|3x-12| \leqslant -7x-2 \quad \text{ET} \quad 7x+2 \leqslant 0) \\
\Leftrightarrow\ & \left(-7x-2 \leqslant 3x-12 \leqslant 7x+2 \quad \text{ET} \quad x \geqslant -\frac{2}{7}\right) \quad \text{OU} \quad \left(7x+2 \leqslant 3x-12 \leqslant -7x-2 \quad \text{ET} \quad x \leqslant -\frac{2}{7}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left(10 \leqslant 10x \quad \text{ET} \quad -14 \leqslant 4x \quad \text{ET} \quad x \geqslant -\frac{2}{7}\right) \quad \text{OU} \quad \left(4x \leqslant -14 \quad \text{ET} \quad 10x \leqslant 10 \quad \text{ET} \quad x \leqslant -\frac{2}{7}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left(1 \leqslant x \quad \text{ET} \quad -\frac{7}{2} \leqslant x \quad \text{ET} \quad x \geqslant -\frac{2}{7}\right) \quad \text{OU} \quad \left(x \leqslant -\frac{7}{2} \quad \text{ET} \quad x \leqslant 1 \quad \text{ET} \quad x \leqslant -\frac{2}{7}\right) \\
\Leftrightarrow\ & (1 \leqslant x) \quad \text{OU} \quad \left(x \leqslant -\frac{7}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des réels solutions est

$$\boxed{S = \left]-\infty; -\frac{7}{2}\right] \cup [1; +\infty[\,.}$$

Autre méthode : on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
|3x-12| \leqslant |7x+2| \quad & \Leftrightarrow \quad (3x-12)^2 \leqslant (7x+2)^2 \qquad \text{car les valeurs abolues sont positives} \\
& \Leftrightarrow \quad 9x^2 - 72x + 144 \leqslant 49x^2 + 28x + 4 \\
& \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 40x^2 + 100x - 140 \\
& \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2x^2 + 5x - 7
\end{aligned}$$

Le discriminant associé à $2x^2+5x-7$ vaut

$$\Delta = 25 + 56 = 81 = 9^2.$$

Donc les racines de $2x^2+5x-7$ sont

$$\frac{-5-9}{4} = -\frac{7}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{-5+9}{4} = 1.$$

Par conséquent (le signe du trinôme à l'extérieur des racines) $|3x-12| \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{7}{2}$ OU $x \geqslant 1$. A nouveau, l'ensemble des réels solutions est

$$\boxed{S = \left]-\infty; -\frac{7}{2}\right] \cup [1; +\infty[\,.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation est bien définie si et seulement si $x+5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$. Soit donc $x \in [-5; +\infty[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x+3 \leqslant \sqrt{x+5} \quad & \Leftrightarrow \quad x+3 \leqslant 0 \quad \text{OU} \quad \left(x+3 \geqslant 0 \quad \text{ET} \quad (x+3)^2 \leqslant x+5\right) \\
& \Leftrightarrow \quad x \leqslant -3 \quad \text{OU} \quad \left(x \geqslant -3 \quad \text{ET} \quad x^2+6x+9 \leqslant x+5\right) \\
& \Leftrightarrow \quad x \leqslant -3 \quad \text{OU} \quad \left(x \geqslant -3 \quad \text{ET} \quad x^2+5x+4 \leqslant 0\right)
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé à x^2+5x+4. On a $\Delta = 25-16 = 9$. Donc les racines de x^2+5x+4 sont $\frac{-5-3}{2} = -4$ et $\frac{-5+3}{2} = -1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
x+3 \leqslant \sqrt{x+5} \quad & \Leftrightarrow \quad x \leqslant -3 \quad \text{OU} \quad (x \geqslant -3 \quad \text{ET} \quad -4 \leqslant x \leqslant -1) \\
& \Leftrightarrow \quad x \leqslant -3 \quad \text{OU} \quad -3 \leqslant x \leqslant -1 \\
& \Leftrightarrow \quad x \leqslant -1.
\end{aligned}$$

Or puisque $x \geqslant -5$, on en déduit que l'ensemble des réels solutions est

$$\boxed{S = [-5;-1].}$$

3. On commence par noter que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+4 \geqslant 0$ et donc $\sqrt{x^2+4}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+4} \leqslant 8-x \quad & \Leftrightarrow \quad 8-x \geqslant 0 \quad \text{ET} \quad x^2+4 \leqslant (8-x)^2 \quad \text{car la fonction carrée est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
& \Leftrightarrow \quad x \leqslant 8 \quad \text{ET} \quad x^2+4 \leqslant x^2-16x+64 \\
& \Leftrightarrow \quad x \leqslant 8 \quad \text{ET} \quad 16x \leqslant 60 \\
& \Leftrightarrow \quad x \leqslant 8 \quad \text{ET} \quad x \leqslant \frac{15}{4} \\
& \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{15}{4} \quad \text{car } \frac{15}{4} < 4 < 8.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble des réels solutions est

$$\boxed{S = \left]-\infty; \frac{15}{4}\right].}$$

II S'entraîner

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x+2}$ et $u(x) = x + \frac{x^2}{2}$.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u(x)^2 = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4}.$$

Donc au voisinage de 0,

$$\boxed{u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 + x^3 + o\left(x^3\right).}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
u(x)^3 & \underset{x\to 0}{=} \left(x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(x + \frac{x^2}{2}\right) \\
& \underset{x\to 0}{=} x^3 + x^2\frac{x^2}{2} + \left(x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(x + \frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right).}$$

En particulier $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ et donc $\boxed{o\left(u^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)}$.

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (le discriminant du dénominateur est négatif) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x+2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{1+u(x)}.$$

Or lorsque $u \to 0$, on a $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o\left(u^3\right)$. De plus lorsque $x \to 0$, on a $u(x) \to 0$. Par conséquent,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - u(x) + u(x)^2 - u(x)^3 + o\left(u(x)^3\right)\right).$$

Donc en utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned}
f(x) & \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right) - \left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) + o\left(x^3\right)\right) \\
& \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) \\
& \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).}$$