Révisions de Printemps 01

Pour Mardi 23/04

Intégration

Erreur 1 du DS7 à corriger :
Soient $p \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et u_1 et u_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$. Or u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc $\operatorname{Im}(p)$ est libre.

Exercice I (S'entrainer)

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, $T > 0$ et $g : x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée en fonction de f.
3. On suppose que g est constante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur f ?

Solution de l'erreur 1 du DS7 : dire qu'un espace vectoriel est libre ne correspond à aucune définition. L'aspect libre est défini uniquement pour des familles de vecteurs. Il fallait donc dire (u_1, u_2) est libre et génératrice de $\mathrm{Im}\,(p)$ et forme donc une base de $\mathrm{Im}\,(p)$. N'oubliez pas de faire attention à la nature des objets en général.

Solution de l'exercice I

1. La fonction f est continue par hypothèse sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est continue sur $[x; x+T]$. Donc $\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et $g(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.
2. Posons $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (par exemple il est possible de prendre n'importe quel autre vecteur fixé à la place de 0). Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, on sait que F existe et est l'unique primitive de f s'annulant en 0. En particulier la fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. A partir de là, on remarque, par la relation de Chasles,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x+T) - F(x).$$
Donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est } \mathscr{C}^1}$ comme différence de deux fonctions $\mathscr{C}^1$. De plus,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x).}$$
3. On suppose que g est constante i.e.
$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x, \qquad g(x) = C$$
ou encore
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = 0.$$
Donc d'après la question précédente,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) - f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x).$$
Autrement dit, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } T\text{-périodique.}}$