Révisions de Printemps 10

Pour Vendredi 03/05

Séries numériques

Erreur 10 du DS7 à corriger : déterminer un contre-exemple à l'affirmation suivante (qui est donc fausse) : soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$. Alors

$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \Rightarrow \qquad f = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{OU} \quad g = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Exercice I (S'entrainer)

1. Soit $x > 0$. Déterminer suivant les valeurs de x de la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 x^n$.
2. Soit $x \in]0; 1[$.
   (a) A l'aide d'un changement d'indice, calculer
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} k x^k.$$
   (b) En déduire la somme
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^k.$$

Solution de l'erreur 10 du DS7 : on pose $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ la projection sur Vect $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$ la projection sur Vect $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors il est facile de vérifier que $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$, $g \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$, $f \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$ et $g \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$. De plus pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Ainsi, on a également

$$\boxed{g \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)} \quad \text{alors que} \quad f \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)} \quad \text{et} \quad g \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}.}$$

Solution de l'exercice I

1. *Premier cas.* Soit $x \in]0;1[$ alors par croissance comparée $\lim\limits_{n \to +\infty} n^4 x^n = 0$ i.e. $n^2 x^n \underset{n \to +\infty}{\ll} \frac{1}{n^2}$. Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$0 \leqslant n^2 x^n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^2 x^n$.
Second cas. Soit $x \in [1; +\infty[$, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 x^n = +\infty$. Par conséquent la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^2 x^n$ diverge grossièrement et donc diverge.
Conclusion. On a
$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } x \in]0;1[\text{ alors } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^2 x^n \text{ converge.} \\ \text{Si } x \in [1; +\infty[\text{ alors } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^2 x^n \text{ diverge.} \end{cases}}$$

2. Soit $x \in]0;1[$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} k x^k$. Par le changement d'indice $\tilde{k} = k - 1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} k x^k &= 0 + \sum_{k=1}^{n} k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) x^{k+1} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} k x^k + x \sum_{k=0}^{n-1} x^k \\ &= x \sum_{k=0}^{n} k x^k - x n x^n + x \sum_{k=0}^{n-1} x^n \\ &= x S_n - n x^{n+1} + x \sum_{k=0}^{n-1} x^n. \end{aligned}$$
   Or $\sum_{k=0}^{n-1} x^n$ est une somme géométrique de raison $x \neq 1$. Donc
$$\begin{aligned} S_n = x S_n - n x^{n+1} + x \frac{1 - x^n}{1 - x} \quad &\Leftrightarrow \quad (1 - x) S_n = \frac{x - x^{n+1} - n x^{n+1} + n x^{n+2}}{1 - x} \\ &\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{x - (n+1) x^{n+1} + n x^{n+2}}{(1 - x)^2}. \end{aligned}$$
   Puisque $x \in]0;1[$, par croissance comparée, $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{(1-x)^2}$. Donc on en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{N}} n x^n$ converge et de plus
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1 - x)^2}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a par le changement d'indice $\tilde{k} = k+1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 x^k = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 x^{k+1}$$
$$= x \sum_{k=0}^{n-1} k^2 x^k + 2x \sum_{k=0}^{n-1} k x^k + x \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

- D'après la question 1, on sait que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 x^k$ converge.
- D'après la question 2.(a), la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k x^k$ converge.
- La série $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ converge également en tant que série géométrique de raison $x \in]0;1[$.

Donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$, en notant $S = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^k$, on obtient que

$$S = xS + 2x \sum_{k=0}^{+\infty} k x^k + x \frac{1}{1-x}.$$

Donc d'après la question 2.(a),

$$S = xS + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad (1-x)\, S = \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{x-x^2}{(1-x)^2} \quad \Leftrightarrow \quad S = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.}$$