Révisions de Printemps 02

Pour Mercredi 24/04

Complexes

Erreur 2 du DS7 à corriger :
On a

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &= \left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)\\ &= \left(\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) \qquad C_2 \leftarrow C_1 - C_2.\end{aligned}$$

Exercice I (S'entrainer)

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que 1, z et z^2+1 sont alignés si et seulement si $(z-\overline{z})\left(|z|^2 - (z+\overline{z})\right) = 0$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$|z|^2 - (z+\overline{z}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z-1|^2 = 1.$$
3. En déduire l'ensemble géométrique des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que 1, z et z^2+1 soient alignés.

Solution de l'erreur 2 du DS7 : les opérations élémentaires sur une famille de vecteurs ne modifie ni son caractère libre ni son caractère générateur mais change la famille elle même ! ! Il est incorrect d'écrire une égalité. Une équivalence en colonne serait à la rigueur admissible :

$$\mathscr{B} \underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \qquad C_2 \leftarrow C_1 - C_2.$$

Solution de l'exercice I

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons $z \neq 0$. Alors, on a

$$\begin{aligned} 1,\ z \text{ et } z^2+1 \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad z - 1 = \lambda \left(z^2 + 1 - 1\right) \\ &\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad z - 1 = \lambda\, z^2 \\ &\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \frac{z-1}{z^2} = \lambda \qquad \text{car } z \neq 0 \text{ n'est pas solution} \\ &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z^2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On retrouve une assertion de la proposition IV.1. Par suite,

$$\begin{aligned} 1,\ z \text{ et } z^2+1 \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z^2} = \overline{\frac{z-1}{z^2}} \\ &\Leftrightarrow (z-1)\,\overline{z}^2 = (\overline{z}-1)\,z^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{z}\,|z|^2 - \overline{z}^2 = z\,|z|^2 - z^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2\,(\overline{z} - z) = \overline{z}^2 - z^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2\,(\overline{z} - z) = (\overline{z} - z)\,(\overline{z} + z) \\ &\Leftrightarrow (\overline{z} - z)\left(|z|^2 - (\overline{z} + z)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - \overline{z})\left(|z|^2 - (z + \overline{z})\right) = 0. \end{aligned}$$

On note que si $z = 0$ alors les points d'affixe 1, 0 et $0^2 + 1 = 1$ sont bien alignés et d'autre part, on a bien $(z - \overline{z})\left(|z|^2 - (z + \overline{z})\right) = 0$. Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{1,\ z \text{ et } z^2+1 \text{ sont alignés} \quad \Leftrightarrow \quad (z - \overline{z})\left(|z|^2 - (z + \overline{z})\right) = 0.}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Partons du membre de droite. On a

$$\begin{aligned} |z-1|^2 = 1 &\Leftrightarrow |z|^2 - 2\mathrm{Re}\left(z \times \overline{1}\right) + |1|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - 2\mathrm{Re}\,(z) + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - (z + \overline{z}) + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - (z + \overline{z}) = 0. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{|z|^2 - (z + \overline{z}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z-1|^2 = 1.}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par la question 1, on a

$$\begin{aligned} 1,\ z \text{ et } z^2+1 \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow (z - \overline{z})\left(|z|^2 - (z + \overline{z})\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \quad \text{OU} \quad |z|^2 - (z + \overline{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \overline{z} \quad \text{OU} \quad |z-1|^2 = 1 \qquad \text{d'après la question 2,} \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \quad \text{OU} \quad |z-1|^2 = 1. \end{aligned}$$

Or le point $M(z)$ a une affixe vérifiant $|z-1|^2 = 1$ si et seulement si M est sur le cercle de centre 1 et de rayon 1. Conclusion Les points d'affixes 1, z et $z^2 + 1$ sont alignés si et seulement si le point $M(z)$ est sur la droite des abscisses ($z \in \mathbb{R}$) ou si M est sur le cercle de centre 1 et de rayon 1. Un joli dessein représentant ces solutions est bien sûr le bienvenu.