# Révisions de Printemps 03

## Pour Jeudi 25/04

*Probabilités*

**Erreur 3 du DS7 à corriger :** Outre le fait que $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, quelle justification faut-il apporter à l'égalité suivante :

$$\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Vect}\left(p\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, p\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, p\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

### Exercice I (S'entrainer) *Retour sur l'exemple 29 du cours :*

*Winnie l'ours et Pigachu lance chacun leur propre dé, Luuuuuuuc arbitre le jeu. On note $A$ l'évènement « Winnie l'ours obtient un nombre pair » et $B$ l'évènement « Pigachu obtient un nombre impair » et $C$ l'évènement « la somme des deux dés est paire ». Alors $A$ et $B$ sont indépendants et compatibles et $A$ et $C$ sont dépendants et compatibles.*

1. Montrer que cet énoncé est faux si l'on suppose les dés équilibrés.
2. On suppose maintenant que *Luuuuuuuc* n'est pas très attentif et que *Pigachu* joue avec un dé truqué qui retourne un nombre pair une fois sur trois. On suppose toujours que les deux lancers de dés sont indépendants. Montrer alors que $A$ et $C$ sont dépendants et compatibles.

**Solution de l'erreur 3 du DS7 :** sans piège mais il est important de souligner dans cette égalité que $p$ est linéaire.

## Solution de l'exercice I

1. Les évènements $A$ et $B$ sont par hypothèse indépendants, il sont également compatibles car
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$
Les dés étant équilibrés, les résultats sont équiprobables. *Winnie l'ours* Obtient un nombre pair dans trois cas sur six donc $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. De même $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Donc
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0.$$
Cette probabilité étant non nulle, on en déduit que $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont compatibles}}$.
Montrons maintenant que $A$ et $C$ sont compatibles mais qu'ils sont, de façon contre intuitive, indépendant. Pour obtenir $A$ et $C$, un résultat pair au premier dé et un résultat pair sur la somme des dés, il faut et il suffit d'avoir un résultat pair sur le premier dé et un résultat pair sur le second dé : $A \cap C = A \cap \overline{B}$. Donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) &= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) && \text{par indépendance,}\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$
D'autre part, pour obtenir une somme pair, il faut et il suffit que les deux dés soient de même parité :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \sqcup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) &= \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) && \text{car l'union est disjointe,}\\ &= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B) && \text{par indépendance,}\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
Compte tenu du fait que $\mathbb{P}(A) = 1/2$, on en déduit que
$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cap C).$$
Par définition de l'indépendance, on en déduit bien que $\boxed{A \text{ et } C \text{ sont indépendants}}$ et puisque $\mathbb{P}(A \cap C) \neq 0$, $\boxed{\text{ces évènements sont également compatibles}}$.
2. On reprend les calculs mais cette fois-ci, on a $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = \frac{1}{3}$ et donc $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = \frac{2}{3}$. On obtient alors,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) &= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) && \text{par indépendance,}\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$
D'autre part,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \sqcup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) &= \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) && \text{car l'union est disjointe,}\\ &= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B) && \text{par indépendance,}\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A \cap C)$$
et donc $\boxed{A \text{ et } C \text{ ne sont pas indépendants (mais toujours compatibles)}}$.