Révisions de Printemps 06

Pour Dimanche 28/04

Espace Vectoriel

Erreur 6 du DS7 à corriger : Soit E un espace vectoriel, A un sous-espace vectoriel de E et p un endomorphisme de E. Déterminer un contre-exemple à l'équivalence suivante :

$$(\forall u \in A, \quad p(u) = u) \qquad \Leftrightarrow \qquad p\left(A\right) = A.$$

Indication 1 : c'est la réciproque qui est fausse.
Indication 2 : on pourra aller chercher du côté des homothéties.

Exercice I (S'entrainer)

Soit $E = \mathscr{F}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose F l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 1. On note également

$$G = \{\, f \in \mathscr{F}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right) \mid f(0) = f(1) = 0 \,\}\,.$$

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et en déterminer une base.
3. Montrer que $F \oplus G = E$.

Solution de l'erreur 6 du DS7 : on pose $E=\mathbb{R}^2$, $A=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et

$$p \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix}-x\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Alors pour tout $u\in A$, il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $u=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ et donc

$$p(u)=\begin{pmatrix}-x\\0\end{pmatrix}=-u\in A.$$

Donc $p(A)\subseteq A$. Réciproquement, si $u\in A$, il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $u=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-x\\0\end{pmatrix}$. Donc

$$u=-\begin{pmatrix}-x\\0\end{pmatrix}=-p\begin{pmatrix}-x\\0\end{pmatrix}.$$

Posons $v=\begin{pmatrix}-x\\0\end{pmatrix}$. On observe alors que $u=p(v)$ et $v\in A$. Donc $u\in p(A)$. Donc $A\subseteq p(A)$.

Conclusion, $\boxed{p(A)=A}$. Pourtant, si $u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ alors $p(u)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=-u\neq u$ (car $u\neq 0$). On a donc également montré que

$$\boxed{\exists u\in A,\qquad p(u)\neq u.}$$

L'équivalence donnée est donc fausse.
NB : une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par exemple $x\mapsto -x$ marchait aussi mais c'était moins rigolo.

Solution de l'exercice I

1.
   - On a $G\subseteq\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par définition de G.
   - Soit $f=0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Alors $f(0)=f(1)=0$ notamment. Donc $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\in G$ (et G est non vide).
   - Soient $(f,g)\in G^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Posons $h=\lambda f+\mu g$. Montrons que $h\in G$. On a

   $$\begin{aligned} h(0)=(\lambda f+\mu g)(0) &= \lambda f(0)+\mu g(0) && \textit{par définition}\\ &=\lambda\times 0+\mu\times 0 && \textit{car } f\in G \textit{ et } g\in G\\ &=0.\end{aligned}$$

   De même,

   $$h(1)=\lambda f(1)+\mu g(1)=0.$$

   Donc $h\in G$ i.e. $\lambda f+\mu g\in G$. Donc G est stable par combinaison linéaire.

   Conclusion, $\boxed{G \text{ est un } \mathbb{R}\text{-sous-espace vectoriel de } E}$.
2. Par définition de F,

   $$F=\left\{f : x\mapsto ax+b\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\;\middle|\;(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

   Posons $e_1 : x\mapsto 1$ la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ et $e_2 : x\mapsto x$ la fonction identité de $\mathbb{R}$. Alors on constate que

   $$F=\left\{ae_2+be_1\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\;\middle|\;(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}=\operatorname{Vect}(e_1,e_2).$$

   L'ensemble F étant un espace engendré par deux éléments de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,
   $\boxed{\text{est un espace vectoriel de dimension finie de } \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.
   De plus e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires : soient $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que

   $$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2=0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

   Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

   $$\lambda_1 e_1(x)+\lambda_2 e_2(x)=\lambda_1+\lambda_2 x=0.$$

   Notamment si $x=0$ alors $\lambda_1=0$ et par suite lorsque $x=1$, $0+\lambda_1=0$ donc $\lambda_1=\lambda_2=0$. Donc (e_1,e_2) est libre. Or cette famille engendre F. Conclusion, $\boxed{(e_1,e_2) \text{ est une base de } F}$. Donc

   $$\dim(F)=\operatorname{Card}(e_1,e_2)=2.$$

3. Procédons par analyse synthèse.
Analyse. Soient $h \in E$, $f \in F$ et $g \in G$ tels que
$$h = f + g.$$
Puisque $f \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h(x) = ax + b + g(x).$$
Puisque $g \in G$, alors $g(0) = 0$. Donc
$$h(0) = b.$$
Donc b est entièrement déterminé par h. De plus $g(1) = 0$. Donc
$$h(1) = a + b \qquad \Leftrightarrow \qquad a = h(1) - b = h(1) - h(0).$$
Donc le réel a est également entièrement déterminé par h. Enfin, on en déduit que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = h(x) - ax - b = h(x) - (h(1) - h(0))\, x - h(0).$$
Conclusion, si h se décompose en la somme d'un élément f de F et d'un élément g de G alors nécessairement
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} f(x) & = (h(1) - h(0))\, x + h(0) \\ g(x) & = h(x) - (h(1) - h(0))\, x - h(0). \end{cases}$$
Ceci démontre l'unicité de la décomposition est donc le fait que F et G soient en somme directe.
Synthèse. Montrons maintenant que cette décomposition fonctionne pour tout $h \in E$. Soit $h \in E$. On pose
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} f : x & \mapsto (h(1) - h(0))\, x + h(0) \\ g : x & \mapsto h(x) - (h(1) - h(0))\, x - h(0). \end{cases}$$
f et g sont bien deux éléments de E. Montrons que
(i) $f \in F$
(ii) $g \in G$
(iii) $f + g = h$.

(i) La fonction f est bien une fonction polynomiale de degré au plus 1. Donc $f \in F$.
(ii) $g(0) = h(0) - (h(1) - h(0)) \times 0 - h(0) = 0$ et $g(1) = h(1) - (h(1) - h(0)) \times 1 - h(0) = h(1) - h(1) + h(0) - h(0) = 0$ Donc $g \in G$.
(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) + g(x) = (h(1) - h(0))\, x + h(0) + h(x) - (h(1) - h(0))\, x - h(0) = h(x).$$
Donc $f + g = h$.

Ainsi, $h \in F + G$. Donc $E \subseteq F + G$. La réciproque est vraie car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Donc
$$E = F + G.$$
Or on a aussi montré que la somme est directe. Conclusion,
$$\boxed{F \oplus G = E.}$$