Révisions de Printemps 07

Pour Lundi 29/04

Intégration

Erreur 7 du DS7 à corriger : Soit $\mathscr{B}$ une base de E (un espace vectoriel). Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On sait que

$$E = \text{Ker}\,(f - 2\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}\,(f - \text{Id}_E)\,.$$

Alors $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ avec $\mathscr{B}_1$ une base de $\text{Ker}\,(f - 2\text{Id}_E)$ et $\mathscr{B}_2 = \text{Ker}\,(f - \text{Id}_E)$.

Exercice I (S'entrainer) *Lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas $\mathscr{C}^1$.*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$. On suppose f de classe $\mathscr{C}^1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication : IPP IPP IPP hourra !

Solution de l'erreur 7 du DS7 : la réponse donnée laisse à croire qu'une base $\mathscr{B}$ QUELCONQUE s'écrit forcément comme l'union d'une base $\mathscr{B}_1$ et d'une base $\mathscr{B}_2$, adaptées à la somme directe. Ce qui est faux. Par exemple $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \oplus \text{Vect}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ et il est facile de vérifier que $\mathscr{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Cependant cette base n'est pas adaptée à la somme car $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \notin \text{Vect}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \notin \text{Vect}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ et il en est de même pour $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. Le raisonnement à produire était le suivante

1. On pose $\mathscr{B}_1$ une base de E_1 et $\mathscr{B}_2$ une base de E_2.
2. Puisque E_1 et E_2 sont supplémentaires, alors par le théorème de concaténation de bases adaptées à des espaces supplémentaires, on sait que $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \sqcup \mathscr{B}_2$ est une base de $E = E_1 \oplus E_2$.
3. Puis on pouvait travailler avec cette base (montrer que pour tout $u \in \mathscr{B}$, $f(u) = u$...)

Solution de l'exercice I

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u = f$ et $v : t \mapsto \frac{-\cos(nt)}{n}$.Par hypothèse u est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ et v étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est notamment $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. De plus pour tout $t \in [a;b]$,

$$u'(t) = f'(t) \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \sin(nt).$$

Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f'(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(a)\cos(na) - f(b)\sin(nb)}{n} + \int_a^b f'(t)\frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Majorons maintenant la valeur absolue de cette expression par une suite convergeant vers 0 pour montrer que I_n tend vers 0. Par l'inégalité triangulaire, puisque $a < b$,

$$\begin{aligned} |I_n| &\leqslant \left|\frac{f(a)\cos(na) - f(b)\sin(nb)}{n}\right| + \left|\int_a^b f'(t)\frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{|f(a)|\,|\cos(na)| + |f(b)|\,|\sin(nb)|}{n} + \int_a^b |f'(t)|\,\frac{|\cos(nt)|}{n}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or $|\cos(na)| \leqslant 1$, $|\sin(nb)| \leqslant 1$, et pour tout $t \in [a;b]$, $|\cos(nt)| \leqslant 1$. Donc

$$|I_n| \leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t}{n}.$$

Posons $M = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ et observons (c'est important) que M ne dépend pas de n. Par conséquent,

$$0 \leqslant |I_n| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Donc par le théorème d'encadrement $|I_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

NB : on pouvait continuer à majorer M. Puisque f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, f' est continue sur $[a;b]$ et est donc bornée (et atteint ses bornes) sur $[a;b]$. Posons $N = \underset{\sup}{s \in [a;b]} |f'(s)|$. On a alors par croissance de l'intégrale

$$M\,|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b N\,\mathrm{d}t = |f(a)| + |f(b)| + (b-a)N.$$