Révisions de Printemps 09

Pour Jeudi 02/05

Intégration

Erreur 9 du DS7 à corriger : Donner un contre-exemple à l'assertion suivante (qui est donc fausse) : soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. On pose $\mathscr{B}_1$ une base de E_1 et $\mathscr{B}_2$ une base de E_2.

$$\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad E_1 \oplus E_2.$$

Exercice I (S'entrainer)

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{t-1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t-1.$$
3. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1. On notera encore f la nouvelle fonction prolongée.
4. Montrer que la fonction prolongée est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution de l'erreur 9 du DS7 : on pose dans $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{B}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ et $\mathscr{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ puis $E_1 = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_1)$ le plan horizontal et $E_2 = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_2)$ un plan vertical. Alors

$$\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2 = \emptyset$$

et pourtant on voit (au moins géométriquement à démontrer ensuite rigoureusement par le calcul) que

$$E_1 \cap E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \neq \{0_{\mathbb{R}_3}\}\,.$$

Par conséquent E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe.

Solution de l'exercice I

1. On pose $U = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Soit $x \in U$.
   - Premier cas $x > 1$, alors $x^2 > x > 1$ et donc la fonction ln est continue et non nulle sur $\left[x; x^2\right]$. Donc $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est définie et continue sur $\left[x; x^2\right]$. Donc $f(x)$ existe.
   - Second cas $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < x < 1$ donc la fonction est continue et non nulle sur $\left[x^2; x\right]$ donc $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est définie et donc
   $$f(x) = -\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$
   existe bien.

   Dans tous les cas $f(x)$ existe et donc $\boxed{f \text{ est bien définie sur } U = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.}$
2. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$
   $$g(t) = t - 1 - \ln(t)\,.$$
   La fonction g est définie et même dérivable sur R_+^* et pour tout $t \in R_+^*$, on a
   $$g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}.$$
   Par conséquent pour $t \in R_+^*$, on a
   $$g'(t) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t \geqslant 1.$$
   De plus, $\lim_{t \to 0^+} g(t) = \lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$ et $g(1) = 0$. Ainsi,

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   On en déduit que pour tout $t > 0$, $g(t) \geqslant 0$ i.e. $t - 1 \geqslant \ln(t)$. Il nous reste à démontrer que $\frac{t-1}{t} \leqslant \ln(t)$. On pourrait poser $h(t) = \ln(t) - \frac{t-1}{t}$ mais voici une petite astuce. Soit $t > 0$, en posant $s = \frac{1}{t}$, on obtient par ce qui précède que
   $$\ln(s) \leqslant s - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln\left(\frac{1}{t}\right) \leqslant \frac{1}{t} - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\ln(t) \leqslant \frac{1-t}{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{t-1}{t} \leqslant \ln(t).$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{t-1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t - 1.}$$

3. Soit $x \in U = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Premier cas, on suppose $x > 1$ et alors $x^2 > x > 1$. Donc pour tout $t \in \left[x; x^2\right]$, on a $t > 1$, et donc d'après la question précédente et la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$0 < \frac{t-1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t - 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < \frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{t}{t-1}.$$

Puisque $x < x^2$, par croissance de l'intégrale, on obtient que

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{t}{t-1}\,\mathrm{d}t.$$

Or, d'une part,

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = \left[\ln\left(|t-1|\right)\right]_{t=x}^{t=x^2} = \left[\ln\left(t-1\right)\right]_{t=x}^{t=x^2} = \ln\left(x^2-1\right) - \ln\left(x-1\right) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln\left(x+1\right).$$

D'autre part, (par la ruse ancestrale)

$$\int_x^{x^2} \frac{t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{t-1+1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} 1 + \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \left(x^2 - x\right) + \ln\left(x+1\right).$$

On a donc montré que pour tout $x > 1$,

$$\ln\left(x+1\right) \leqslant f(x) \leqslant \left(x^2-x\right) + \ln\left(x+1\right).$$

On observe alors que

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln\left(x+1\right) = \ln(2) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(x^2 - x\right) + \ln\left(x+1\right).$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \ln(2).$$

Soit maintenant $x < 1$, alors $0 < x^2 < x < 1$. Donc pour tout $t \in \left[x^2; x\right]$, on a $t < 1$ et donc d'après la question précédente

$$\frac{t-1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t - 1 < 0.$$

Donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$, on a

$$\frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{t}{t-1} < 0.$$

En invoquant la croissance de l'intégrale et le fait que $x^2 < x$, on obtient

$$\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = -f(x) \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{t}{t-1}\,\mathrm{d}t.$$

En multipliant par -1, on a alors

$$-\int_{x^2}^{x} \frac{t}{t-1}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t.$$

De même que précédemment,

$$-\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = -\left[\ln\left(|t-1|\right)\right]_{t=x^2}^{t=x} = -\left[\ln\left(1-t\right)\right]_{t=x^2}^{t=x} = \ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1-x\right) = \ln\left(1+x\right).$$

et

$$-\int_{x^2}^{x} \frac{t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \ln\left(1+x\right) + x^2 - x.$$

Par conséquent,

$$\forall x < 1, \qquad \ln\left(1+x\right) + x^2 - x \leqslant f(x) \leqslant \ln\left(x+1\right)$$

Par encadrement, on en déduit à nouveau que

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \ln(2) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x).$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 1 en posant } f(1) = \ln(2).}$

4. On a vu que $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$ donc par le théorème fondamentale de l'analyse,

$$F_1 \quad : \quad x \mapsto \int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

est $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et pour tout $x>1$, $F_1'(x)=\frac{1}{\ln(x)}$. Or pour tout $x>1$, on a $x^2>1$ et donc

$$f(x)=F_1\left(x^2\right)-F_1\left(x\right).$$

Donc par différence et composition de fonctions $\mathscr{C}^1$, f est $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et

$$\forall x>1, \quad f'(x)=2xF_1'\left(x^2\right)-F_1'(x)=\frac{2x}{\ln\left(x^2\right)}-\frac{1}{\ln(x)}=\frac{x}{\ln(x)}-\frac{1}{\ln(x)}=\frac{x-1}{\ln(x)}.$$

De même $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur l'intervalle $]0;1[$ donc par le théorème fondamentale de l'analyse,

$$F_2 \quad : \quad x \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

est $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;1[$, $F_2'(x)=\frac{1}{\ln(x)}$. Or pour tout $x\in]0;1[$, on a $x^2\in]0;1[$ et donc

$$f(x)=F_2\left(x^2\right)-F_2\left(x\right).$$

Donc par différence et composition de fonctions $\mathscr{C}^1$, f est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1[$ et

$$\forall x\in]0;1[, \quad f'(x)=2xF_2'\left(x^2\right)-F_2'(x)=\frac{x-1}{\ln(x)}.$$

Ainsi, on a montré que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ et pour tout $x>0$, $x\neq 1$,

$$f'(x)=\frac{x-1}{\ln(x)}$$

Posons, $y=x-1$ quand $x\to 1$, on a $y\to 0$. Donc

$$f'(x)=\frac{y}{\ln(1+y)}\underset{y\to 0}{=}\frac{y}{y+o\left(y\right)}\underset{x\to 1}{=}\frac{1}{1+o\left(1\right)}\underset{x\to 1}{=}1+o\left(1\right).$$

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ et

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} f'(x)=1.$$

Donc par le théorème de prolongement des fonctions $\mathscr{C}^1$, on en déduit que f est $\mathscr{C}^1$ en 1 et de plus

$$f'(1)=1.$$

Finalement f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ et en 1. Conclusion $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.