Pour lundi 22/10

I Se tester

Proposition I.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{cases} \omega \in \mathbb{U}_n \\ \omega \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$

Je vous ai proposé ce résultat du cours car il fallait l'utiliser dans l'exercice 1 question 2 du DS2. Parmi ceux qui on reconnut qu'il suffisait d'appliquer cette propriété pas UN SEUL (sur les deux classes) n'a pensé à préciser que $\omega \neq 1$ pour l'utiliser...

II S'entraîner

Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut montrer

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor. \tag{$\star$}$$

II.1 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{2} < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2}. \tag{1}$$

(a) On a

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor &\leqslant \frac{x+1}{2} && \text{par définition de la partie entière} \\ &< \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} && \text{d'après (1)} \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

Le nombre $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ est un **entier** strictement plus petit que **l'entier** $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ plus 1 et donc

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.$$

D'autre part, on a également

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor &> \frac{x+1}{2} - 1 && \text{par définition de la partie entière} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \\ &\geqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \frac{1}{2} && \text{d'après (1).} \end{aligned}$$

Puisque $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$, on en déduit que $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$, ce qui conjointement avec l'inégalité réciproque démontrée plus haut nous permet de déduire que

$$\boxed{\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.} \tag{2}$$

(b) A la lumière du résultat précédent (2), on a

$$(\star) \quad \Leftrightarrow \quad \lfloor x \rfloor = 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.$$

Or d'après (1), on a $2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leqslant x < 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$ ce qui signifie exactement que $\lfloor x \rfloor = 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$.

$\boxed{\text{Conclusion, lorsque } \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{2} < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2}, \text{ alors } (\star) \text{ est vérifiée.}}$

II.2 On suppose maintenant que
$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{2} < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1, \tag{3}$$
ce qui est l'unique autre possibilité par définition de $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$. Dans ce cas, on a d'une part,
$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor &\leqslant \frac{x+1}{2} && \text{par définition de la partie entière} \\ &< \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 + \frac{1}{2} && \text{d'après (3).} \end{aligned}$$
Les nombres $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$ étant entiers, on en déduit que $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$.
D'autre part,
$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor &> \frac{x+1}{2} - 1 && \text{par définition de la partie entière} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \\ &\geqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} && \text{d'après (3)} \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$
donc $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ et ces deux nombres étant des entiers, on en déduit que $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$.
Ainsi on en déduit que $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$. Donc lorsque (3) est vraie, on a
$$(\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad \lfloor x \rfloor = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1.$$
Or d'après (3), $2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 \leqslant x < 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 2$, c'est-à-dire $\lfloor x \rfloor = 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$. Finalement $(\bigstar)$ est vérifiée dans ce second cas.

$\boxed{\text{Conclusion, pour tout } x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor.}$

III Complément de cours

Proposition III.1 (Formule de Leibniz)

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors la fonction fg est n fois dérivable et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I. On pose pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$
$$\mathscr{P}(k) \ : \ \begin{cases} \text{la fonction } fg \text{ est } k \text{ fois dérivable} \\ (fg)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} \end{cases}$$
et l'on va montrer par récurrence que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on en déduire alors notamment que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

III.1 Justifier que l'initialisation est vraie.

III.2 Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (pourquoi ne pas prendre n ?). On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

(a) Justifier que $(fg)^{(k)}$ est dérivable. Que peut-on en déduire pour fg ?

(b) Dériver $(fg)^{(k)}$ et montrer que
$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(f^{(i+1)} g^{(k-i)} + f^{(i)} g^{(k-i+1)} \right).$$

(c) En déduire que

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} f^{(i)} g^{(k-i+1)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)}.$$

(d) Montrer alors que

$$(fg)^{(k+1)} = f^{(k+1)}g + \sum_{i=1}^{k} \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right] f^{(i)} g^{(k-i+1)} + fg^{(k+1)}.$$

(e) En déduire que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

III.3 Conclure.