Pour dimanche 28/10

I Se tester

I.1 Donner la définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

I.2 Soient x et y deux réels et $h > 0$ tels que $d(x; y) \leqslant h$. Donner la définition de $d(x; y)$ puis donner un encadrement de x et enfin un encadrement de y.

II S'entraîner

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z suivante :

$$z^{14} + 4 = (3 + i)\, z^7.$$

III Complément de cours

Théorème VI.8 (Dérivée de la réciproque)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Soient $a \in I$ et $b = f(a)$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}.$$

Démonstration. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. On pose $J = f(I)$.

III.1 Justifier l'existence et la continuité de f^{-1} sur J.

Soit $a \in I$ tel que f soit dérivable en a et tel que $f'(a) \neq 0$. Posons $b = f(a)$.

III.2 Pour tout $y \in J \setminus \{b\}$ écrire le taux d'accroissement $\tau_b\left(f^{-1}\right)(y)$ de f^{-1} au point b en y en fonction de $x = f^{-1}(y)$, a, $f(x)$, $f(a)$.

III.3 En déduire que pour tout $y \in J \setminus \{b\}$,

$$\tau_b\left(f^{-1}\right)(y) = \frac{1}{\tau_a(f)\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

III.4 Déterminer en justifiant les limites suivantes :

$$\lim_{y \to b} f^{-1}(y) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \tau_a(f)(x).$$

III.5 En déduire que

$$\tau_a(f)\left(f^{-1}(y)\right) \to f'(a)$$

III.6 Conclure.

$\square$