Pour lundi 29/10

I Se tester

I.1 Enoncer la formule de Pascal.

I.2 Enoncer avec toutes les hypothèses la formule de dérivation de la composée de deux fonctions.

II S'entraîner

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x) + 1.$$

II.1 Etudier la parité et la périodicité de f.

II.2 Montrer que la fonction f est bornée.

II.3 Justifier qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(a) = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $\sin(a) = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

II.4 En déduire que f admet un maximum et un minimum et déterminer les valeurs de ces extremums.

III Complément de cours

Rien à rechercher cette fois-ci mais de la lecture. Voici la touche finale à ce long chapitre sur les fonctions réelles. Lisez bien ce bout de cours et posez-moi des questions par mail ou à la rentrée.

Corollaire VI.9 (Dérivée de la réciproque)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement monotone sur I. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$\forall x \in J, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}.$$

Remarque 50 : Pour retrouver la formule de la dérivée de f^{-1}, il suffit de se souvenir que

$$\forall x \in J, \qquad f\left(f^{-1}(x)\right) = x.$$

Donc en utilisant la formule de la dérivation d'une fonction composée, on trouve que

$$\forall x \in J, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) f'\left(f^{-1}(x)\right) = 1.$$

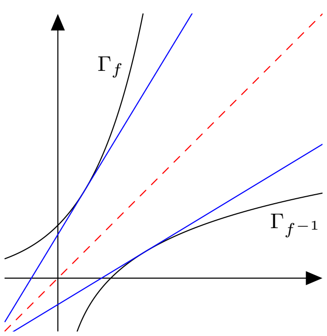
Puisque f' ne s'annule pas sur $I = f^{-1}(J)$, on en déduit bien que $\forall x \in J$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$.

Remarque 51 : Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable sur I. Puisque les graphes de Γ_f et de Γ_f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

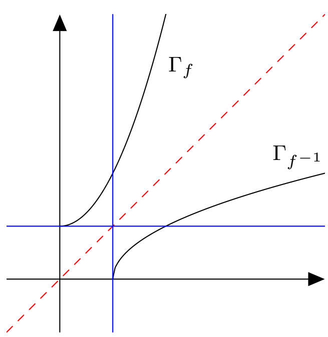
- Si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} admet une tangente au point $b = f(a)$ de pente $1/f'(a)$.
- Si $f'(a) = 0$ alors f^{-1} admet une tangente verticale au point $b = f(a)$.

Exemple 52 :

Si $I = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.



Si $I = \mathbb{R}^+$, $J = [1; +\infty[$ et $f : x \mapsto x^2 + 1$.



VII Etude d'une fonction

Soit f une fonction.

- **Etape 1 :** avant toute chose, on s'assure que la fonction f est bien définie sur l'ensemble de départ considéré et si ce n'est pas le cas, on explicite $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition.
- **Etape 2 :** si la fonction est paire ou impaire ou périodique, on en profite pour réduire le domaine d'étude. Si f est paire ou impaire, il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_-$ pour en déduire par parité l'allure de f sur $\mathbb{R}$ tout entier. Si f est T-périodique, une étude sur un segment $[a; a+T]$ suffit pour déduire le reste du graphe de f sur $\mathbb{R}$ tout entier par translations de vecteurs $kT\overrightarrow{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- **Etape 3 :** on étudie la régularité de f, si elle est continue sur l'ensemble considéré puis si elle est dérivable sur cet ensemble. Bien souvent il est possible de justifier directement sa dérivabilité ce qui implique alors sa continuité.
- **Etape 4 :** on calcule f' la dérivée de la fonction. Attention il est primordiale de ne pas avoir sauté l'étape précédente. Il est rigoureusement interdit de dériver une fonction pour laquelle on n'aura pas justifié au préalable qu'elle était dérivable.
- **Etape 5 :** étude du signe de f'. Un tableau de variation nécessite de connaitre le signe de f' et non juste ses valeurs d'annulation. Il est donc plus judicieux de résoudre des inéquations $f'(x) \geqslant 0$ ou $f'(x) \leqslant 0$ que simplement l'équation $f'(x) = 0$.
- **Etape 6 :** on dresse le tableau de variation de la fonction f que l'on complète si possible : valeurs des extremums et aux bornes du domaine ou plutôt valeurs des limites de la fonction aux bornes du domaine. On n'oublie pas de revenir au domaine tout entier grâce à la parité ou à la périodicité. Il peut nous être demandé certaines équations de tangentes de la courbe pour un meilleur tracé.
- **Etape 7 :** étude des asymptotes ou des branches paraboliques.
  1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$,
     on dit que la droite $x = a$ est **une asymptote verticale** à la courbe Γ_f.
  2. Soit $b \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$,
     on dit que la droite $y = b$ est **une asymptote horizontale** à la courbe Γ_f.
  3. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
     (i) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$,
     on dit que la droite $y = ax + b$ est **une asymptote oblique** à la courbe Γ_f.
     (ii) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = +\infty \in \mathbb{R}$,
     on dit que la courbe Γ_f admet **une branche parabolique de direction asymptotique** $y = ax$ en $+\infty$.
     (iii) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,
     on dit que la courbe Γ_f admet **une branche parabolique de direction asymptotique** (Ox) en $+\infty$.
     (iv) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$,
     on dit que la courbe Γ_f admet **une branche parabolique de direction asymptotique** (Oy) en $+\infty$.

Remarque 53 : Une courbe s'approche toujours infiniment près de son asymptote alors qu'une branche parabolique donne juste une notion de direction asymptotique du graphe. Par exemple la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction (Ox) pourtant la fonction racine carré diverge vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$ et dépasse n'importe quelle asymptote horizontale. Seulement sa croissance est lente et même de plus en plus lente (son accélération/sa dérivée seconde est négative) ce qui donne à la courbe une allure de s'aplatir de plus en plus.

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm *(Leipzig, 1646 - Hanovre 1716) fut un philosophe et mathématicien allemand. Eduqué dans la pensée luthérienne par son père professeur de philosophie morale, il fut dès l'âge de six ans un lecteur assidu en campant dans la bibliothèque de son père. Il entra à quinze ans à l'université de Leibzig où il étudia la philosophie, la théologie et le droit. Considéré comme trop jeune, il dut attendre ses vingt ans pour passer son doctorat de droit. Etant devenu diplomate, il fut envoyé en France pour empêcher un conflit entre Louis XIV et les princes allemands et y rencontra Huygens avec qui il se lia d'amitié. Encouragé par Huygens, Leibniz se tourna alors vers les mathématiques. En 1673, il fut admis à la Royal Society. Quelques années plus tard, de retour en Allemagne, il fonda la revue Acta Eruditorium, qui lui permit de diffuser ses découvertes, ses notations et de rester en contact avec les frères Bernoulli. En 1700, il créa l'Académie de Berlin mais la fin de sa vie fut assombrie par sa relative disgrâce auprès des souverains d'Hanovre et sa querelle avec Newton qui l'accusera d'avoir développé ses idées du calcul différentiel après avoir lu son manuscrit. La paternité de la théorie fut l'objet d'une grande polémique. Les historiens s'accordent aujourd'hui à dire que Leibniz et Newton ont développé plus ou moins indépendamment leur théorie du calcul différentiel. Leibniz est surtout connu du grand public pour ces conceptions philosophiques et les mathématiques ne sont qu'une petite partie de son oeuvre. Pourtant il apporta de nombreux résultats et dans un souci de se faire comprendre il introduisit de nombreuses notations. On lui doit le* d *de la différentiation et le signe intégral* $\int$*. Il fut le premier à utiliser le terme de fonction.*

Pour tout réel x, on a

$$x^2 = x \times x = \underbrace{x + x + \cdots + x + x}_{x \text{ fois}}.$$

Or la fonction $x \mapsto x^2$ étant dérivable, en dérivant, on obtient

$$2x = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{x \text{ fois}} = x.$$

L'égalité étant vraie pour tout réel x, on en déduit que

$$2 = 1.$$

N'y aurait-il pas une (voire deux ?) erreur de raisonnement ?