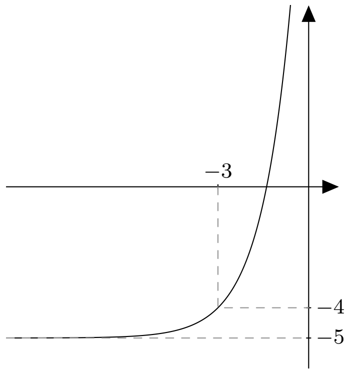
Pour Mercredi 31/10

I Se tester

I.1 Dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ le graphe de $x \to \mathrm{e}^{x+3} - 5$ s'obtient de celui de la fonction exponentielle par une translation de vecteur $-3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$.



I.2 L'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une homothétie, si et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = k\,(z - \omega) + \omega$.

II S'entraîner

Soit f la fonction définie lorsque c'est possible par

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 1 - \frac{2}{x} \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. $\boxed{\text{Donc } \mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*.}$

La fonction f est continue et dérivable sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ comme différence de fonctions définies et dérivables sur leurs ensembles de définition et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 2x - \frac{-1}{x^2} = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2\left(x^3+1\right)}{x^2}.$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{2\left(x^3+1\right)}{x^2}.}$

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2\left(x^3+1\right)}{x^2} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 + 1 \geqslant 0 \qquad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 \geqslant -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant -1 \qquad \text{car la fonction cube est bijective sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
f		↘		↗	‖	↗	

Complétons le tableau. D'une part, $f(-1) = (-1)^2 + 1 - \frac{2}{-1} = 4$. D'autre part, quand $x \to -\infty$, on a $\frac{2}{x} \to 0$ et $x^2 + 1 \to +\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}.$$

De même, quand $x \to +\infty$, on a $\frac{2}{x} \to 0$ et $x^2 + 1 \to +\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}.$$

Enfin, quand $x \to 0^-$, on a $-\frac{2}{x} \to +\infty$ et $x^2 + 1 \to 1$, donc

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty}.$$

De même, quand $x \to 0^+$, on a $-\frac{2}{x} \to -\infty$ et $x^2 + 1 \to 1$, donc

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}.$$

On en déduit le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Notez que $f'(-1) = 0$ et donc f a une tangente horizontale $y = f(0) = 4$ au point d'abscisse $x = -1$. Nous pouvons également affirmer que f admet une tangente verticale $x = 0$.
Etudions le comportement de f en $+\infty$. On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = +\infty.$$

Dans ce cas, on dit que f admet une branche parabolique de direction (O_y) en $+\infty$. De même

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = -\infty.$$

et la fonction f admet également une branche parabolique de direction (O_y) en $-\infty$.
Enfin, donnons la tangente de f au point $x = 1$. On a $f'(1) = \frac{2(1^3+1)}{1^2} = 4$ et $f(1) = 1^2 + 1 - \frac{2}{1} = 0$. Donc au point $(1; 0)$ la courbe de f admet pour tangente la droite d'équation

$$\boxed{y = f'(1)\,(x-1) + f(1) = 4(x-1) + 0 = 4x - 4.}$$

III Complément de cours

Exercice 1. Calculer la dérivée de la fonction $f : \begin{cases}]-1;1[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{cases}$.

Pour tout $x \in]-1;1[$, $1 + x > 0$ et $1 - x > 0$ donc $\frac{1+x}{1-x}$ existe et est strictement positif donc $f(x)$ existe. Ainsi la fonction f est bien définie et même dérivable sur $]-1;1[$. De plus, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{1 \times (1-x) - (1+x) \times (-1)}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} \\ &= \frac{1 - x + 1 + x}{(1-x)} \times \frac{1}{1+x} \qquad \text{car } 1 - x \neq 0 \\ &\boxed{f'(x) = \frac{2}{1-x^2}.} \end{aligned}$$

Corollaire I.3

La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la stricte positivité de sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$. □

I.1 Propriétés algébriques

Proposition I.4

Soient $x \in]0;+\infty[$, $y \in]0;+\infty[$ et $p \in \mathbb{Z}$.

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
3. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
4. $\ln(x^p) = p\ln(x)$.

Démonstration.

III.1 Soit $y > 0$ un réel fixé. Considérons la fonction g suivante :

$$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y).$$

(a) Le réel y est strictement positif donc pour tout $x > 0$, $\ln(xy)$, $\ln(x)$ et $\ln(y)$ existent et donc g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $u(x) = xy$. La fonction u est définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs de $\mathbb{R}_+^* = \mathscr{D}_{\ln}$. Donc la fonction $x \mapsto \ln(xy)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée :

$$\forall x > 0; \quad \ln \circ u'(x) = u'(x)\ln'(u(x)) = y \times \frac{1}{u(x)} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

En conséquence on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + 0 = 0.$$

Or $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle donc on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ (dépendant a priori de y qui est ici un paramètre) tel que

$$\forall x > 0, \quad g(x) = C.$$

$\boxed{\text{Autrement dit la fonction } g \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

(b) D'après la question précédente, $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ g(x) = C$. Or

$$g(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y) = 0.$$

Donc on en déduit que $C = 0$ et que donc

$$\forall x > 0, \quad g(x) = 0$$

i.e. $\forall x > 0$, $\ln(xy) - \ln(x) - \ln(y) = 0$. Le réel $y > 0$ étant quelconque :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).}$$

III.2 Soit $x > 0$. On applique le point 1 avec $y = 1/x > 0$, on obtient $\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).}$$

III.3 D'après la question 1 (avec $x' = x$ et $y' = 1/y$) on a pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$. Or d'après le point 2, pour tout $y > 0$, $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$ et donc

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).}$$

III.4 (a) Soit $x > 0$. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$ définie par « $\ln(x^n) = n\ln(x)$ ».
Initialisation. Si $n = 0$ alors $x^n = x^0 = 1$. Donc $\ln(x^n) = \ln(1) = 0 = n\ln(x)$. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $P(n)$ vraie c'est-à-dire $\ln(x^n) = n\ln(x)$. Alors

$$\begin{aligned} \ln\left(x^{n+1}\right) = \ln(x^n x) &= \ln(x^n) + \ln(x) && \text{d'après le point 1} \\ &= n\ln(x) + \ln(x) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)\ln(x). \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que $P(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion.

$$\boxed{\forall x > 0\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(x^n) = n\ln(x).}$$

(b) Soit $x > 0$. Soit $p \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ alors $-p \in \mathbb{N}$. Par conséquent, d'après la question précédente, $\ln(x^{-p}) = -p\ln(x)$. Or d'après le point 2, $\ln(x^{-p}) = -\ln(x^p)$. Par conséquent $-\ln(x^p) = -p\ln(x)$ et donc

$$\boxed{\forall x > 0, \forall p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \quad \ln(x^p) = p\ln(x).}$$

ce qui conjointement avec la question précédente achève de démontrer le point 4.

□