Pour mardi 23/10

I Se tester

I.1 Soit U et V deux ensembles et $f : U \to V$.

- On dit que f est injective de U dans V si tout élément de V a AU PLUS un antécédent dans U par f. Cela se traduit par
$$\forall (x_1, x_2) \in U^2, \qquad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$
- On dit que f est surjective de U dans V si tout élément de V a AU MOINS un antécédent dans U par f. Cela se traduit par
$$\forall y \in V,\ \exists x \in U, \qquad f(x) = y.$$
- On dit que f est une bijection de U dans V si tout élément de V admet un et un seul antécédent dans U par f. Cela se traduit par
$$\forall y \in V,\ \exists\,!\,x \in U, \qquad f(x) = y.$$

I.2

- La fonction $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ n'est pas injective car $1 \in \mathbb{R}_+$ possède deux antécédents 1 et -1 par f dans $\mathbb{R}$.
- La fonction $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ car -1 ne possède aucun antécédent par f dans $\mathbb{R}$.
- La fonction $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

II S'entraîner

II.1 L'expression $\frac{1-iz}{1+iz}$ a un sens si et seulement si $1+iz \neq 0$ c'est-à-dire si et seulement si $z \neq \frac{-1}{i} = i$. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-iz}{1+iz} = \overline{\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1-iz}{1+iz} = \frac{1+i\overline{z}}{1-i\overline{z}} \\
&\Leftrightarrow \quad (1-iz)(1-i\overline{z}) = (1+i\overline{z})(1+iz) \qquad \text{car } z \neq i \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - iz - i\overline{z} - z\overline{z} = 1 + i\overline{z} + iz - z\overline{z} \\
&\Leftrightarrow \quad 2i(\overline{z} + z) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4i\mathrm{Re}(z) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z \in i\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble solution est la droite des imaginaires purs privé de i :

$$\mathscr{S}_1 = (i\mathbb{R}) \setminus \{i\}.$$

II.2 De même, l'expression $\frac{1-iz}{1+iz}$ a un sens si et seulement si $z \neq i$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz} \in i\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-iz}{1+iz} = -\overline{\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1-iz}{1+iz} = -\frac{1+i\overline{z}}{1-i\overline{z}} \\
&\Leftrightarrow \quad (1-iz)(1-i\overline{z}) = -(1+i\overline{z})(1+iz) \qquad \text{car } z \neq i \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - iz - i\overline{z} - z\overline{z} = -1 - i\overline{z} - iz + z\overline{z} \\
&\Leftrightarrow \quad 2z\overline{z} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2 = 1 \qquad \text{car } z\overline{z} = |z|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad |z| = 1 \qquad \text{car les quantités sont positives.}
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le cercle unité privé du point i :

$$\mathscr{S}_2 = \mathbb{U} \setminus \{i\}.$$

III Complément de cours

Faire l'exemple 46 : soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^3}{3} - x \end{cases}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = x^2 - 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors $f'(x) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \geqslant 1 \;\Leftrightarrow x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$. On en déduit alors la tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

On complète le tableau grâce aux calculs suivants :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} + 1 = \frac{2}{3}, \qquad f(1) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Donc

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, on remarque que f admet un maximum local en -1 valant $\frac{2}{3}$ et un minimum local en 1 valant $-\frac{2}{3}$ mais n'admet pas de minimum global car diverge vers $-\infty$ en $-\infty$ ni de maximum global car diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.