Pour jeudi 25/10

I Se tester

I.1 Soit $r \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $q \leqslant p$, on a

$$\sum_{k=q}^{p} u_k = \frac{u_q + u_p}{2}\,(p-q+1)\,.$$

I.2 Tout ensemble de $\mathbb{N}$ est minorée (par 0 notamment). Une partie majorée de $\mathbb{N}$ est donc bornée dans $\mathbb{N}$. Autre résultat très important, toute partie majorée de $\mathbb{N}$ admet un maximum (et toute partie quelconque de $\mathbb{N}$ admet un minimum). Toute partie de $\mathbb{Z}$ n étant pas nécessairement minorée ne sera pas forcément bornée si elle est majorée. Cependant toute partie majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum. Notez que cela implique l'existence d'une borne supérieure mais parler de maximum est plus précis (un maximum est une borne supérieure mais la réciproque n'est pas vraie dans $\mathbb{R}$).

II S'entraîner

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $|a| < 1$. On définit lorsque c'est possible :

$$f(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

II.1 La fonction f est définie sur l'ensemble des complexes pour lesquels son dénominateur ne s'annule pas. Or

$$1-\overline{a}z = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1 = \overline{a}z \quad\Leftrightarrow\quad z = \frac{1}{\overline{a}}.$$

Donc

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{\overline{a}}\right\}.}$$

Puisque $0 < |a| < 1$, on a $\left|\frac{1}{\overline{a}}\right| = \frac{1}{|\overline{a}|} = \frac{1}{|a|} > 1$. Donc $\frac{1}{\overline{a}} \notin \mathbb{U}$ et par suite $\boxed{\mathbb{U} \subseteq \mathscr{D}_f}$.

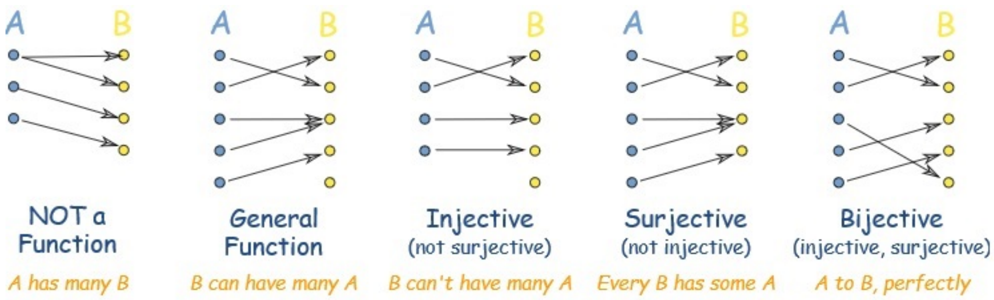
II.2 Soit $z \in \mathscr{D}_f$. On a les équivalences suivantes :

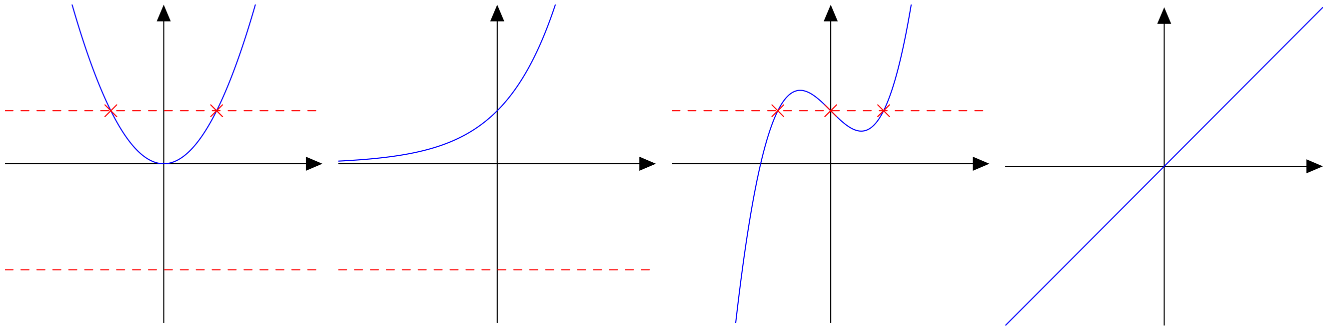
$$\begin{aligned}
f(z)\in\mathbb{U} &\Leftrightarrow |f(z)| = 1 \\
&\Leftrightarrow f(z)\overline{f(z)} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{z-a}{1-\overline{a}z}\overline{\left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{z-a}{1-\overline{a}z}\,\frac{\overline{z}-\overline{a}}{1-a\overline{z}} = 1 \\
&\Leftrightarrow (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) && \text{car } z \neq \frac{1}{\overline{a}} \\
&\Leftrightarrow z\overline{z} - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a} = 1 - a\overline{z} - \overline{a}z + \overline{a}za\overline{z} \\
&\Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 = 1 + |a|^2|z|^2 \\
&\Leftrightarrow |z|^2\left(1-|a|^2\right) = 1-|a|^2 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 = 1 && \text{car } |a| \neq 1 \\
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(z)\in\mathbb{U} \quad\Leftrightarrow\quad z\in\mathbb{U}.}$$

III Complément de cours

Moi c'est bon j'ai compris les schémas. Et vous ?





ni injective ni surjective — injective mais non surjective — surjective mais non injective — bijective

Exemples 49 :

- On note tout d'abord que la fonction f est bien définie sur $]1;+\infty[$ car pour tout $x \in]1;+\infty[$, $x^2 > 1$ et donc $x^2 - 1 > 0$.
  Soit $(x, y) \in]1;+\infty[^2$ tel que $f(x) = f(y)$ i.e. $\ln\left(x^2 - 1\right) = \ln\left(y^2 - 1\right)$. La fonction logarithme est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et est notamment injective sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc
  $$x^2 - 1 = y^2 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = y^2 \qquad \Rightarrow \qquad |x| = |y|.$$
  Or $x > 1 > 0$ et $y > 1 > 0$. Donc on en déduit que $x = y$.
  $\boxed{\text{Nous avons donc montré que la fonction } f \text{ est injective sur }]1;+\infty[.}$
- La fonction g est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ car pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $x^2 \neq 1$ et donc $x^2 - 1 \neq 0$.
  On cherche à montrer que tout élément $y \in \mathbb{R}$ admet un antécédent x par g, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$ tel que $y = \frac{x}{x^2-1}$. Raisonnons par équivalences. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a
  $$y = \frac{x}{x^2 - 1} \qquad \Leftrightarrow \qquad y\left(x^2 - 1\right) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad yx^2 - x - y = 0.$$
  On considère y fixé et l'on cherche x.
  - Premier cas $y = 0$. Alors
    $$y = \frac{x}{x^2 - 1} \qquad \Leftrightarrow \qquad -x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.$$
    Nous avons donc un unique antécédent pour $y = 0$ qui est $x = 0$.
  - Second cas $y \neq 0$. Alors le polynôme en x, $P(x) = yx^2 - x - y = 0$ est d'ordre 2. Son discriminant est
    $$\Delta = 1 - 4 \times y \times (-y) = 1 + 4y^2 > 0.$$
    Le polynôme P possède donc exactement deux racines distinctes qui sont
    $$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4y^2}}{2y} \qquad \text{et} \qquad x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}.$$
    On en déduit donc lorsque $y \neq 0$ que
    $$y = \frac{x}{x^2 - 1} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1 - \sqrt{1 + 4y^2}}{2y} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}.$$

Nous aurions donc deux antécédents potentiels pour y. Vérifions que ces éléments appartiennent bien à l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt{1+4y^2}}{2y} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+4y^2} = 2y+1 \qquad \text{car } y \neq 0,\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2y+1 \geqslant 0 \\ 1+4y^2 = (2y+1)^2 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geqslant -\frac{1}{2} \\ 1+4y^2 = 4y^2+4y+1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad y = 0,
\end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec notre hypothèse $y \neq 0$. Donc pour tout $y \neq 0$, $\frac{1-\sqrt{1+4y^2}}{2y} \neq 1$. De même,

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{1+4y^2}}{2y} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+4y^2} = 2y-1 \qquad \text{car } y \neq 0,\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2y-1 \geqslant 0 \\ 1+4y^2 = (2y-1)^2 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geqslant \frac{1}{2} \\ 1+4y^2 = 4y^2-4y+1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geqslant \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{impossible.}
\end{aligned}$$

Donc de même pour tout $y \neq 0$, $\frac{1+\sqrt{1+4y^2}}{2y} \neq 1$.

Au final lorsque $y \neq 0$ nous avons déterminé non pas un mais même deux antécédents.

Dans tous les cas, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe au moins un antécédent de y par g.

$\boxed{\text{Conclusion, la fonction } g \text{ est surjective sur } \mathbb{R}.}$

Je suis sûr que vous avez adoré cette méthode. En voici une seconde également très sympathique. La fonction g est dérivable sur son ensemble de définition comme quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. De plus pour tout $x \in \mathscr{D}_g$,

$$g'(x) = \frac{(x^2-1) - x(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}.$$

Donc on en déduit que pour $x \in \mathscr{D}_g$,

$$g'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1-x^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant -1$$

Donc g est strictement négative sur $\mathscr{D}_g$. On en déduit ainsi le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$	$-$	
g	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	

On complète le tableau à l'aide des limites aux bornes :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} g(x), \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = +\infty = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x)$$

Ainsi,

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

La fonction g est continue sur $]-1;1[$ et strictement décroissante sur $]-1;1[$ (la dérivée est strictement négative sur $]-1;1[$). Donc d'après le théorème de la bijection (prochainement dans votre cours !), la restriction de g à $]-1;1[$ forme une bijection de $]-1;1[$ dans $\left]\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x); \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} g(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$. Ceci implique que tout élément de $\mathbb{R}$ admet exactement un antécédent par g dans $]-1;1[$ et donc au moins un antécédente par g dans $\mathscr{D}_g$. La fonction g est donc surjective sur $\mathbb{R}$.