Pour samedi 27/10

I Se tester

I.1 On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{1-\cos^2(x)}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2} = 1^2 = 1$. Mais en vous tapant le corrigé, je me rends compte que par une faute de frappe ce n'était pas la limite que je voulais vous demander (que vient faire ce carré ?) alors je vous reprécise au passage que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

I.2 Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

II S'entraîner

II.1 On procède bien entendu par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Initialisation. Si $n = 0$ alors $\sin^{(0)} = \sin$ par définition. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x + \frac{0\times\pi}{2}\right) = \sin(x)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^{(0)}(x) = \sin\left(x + \frac{0\times\pi}{2}\right)$ et donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

La fonction sinus étant $n+1$-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en dérivant l'égalité ci-dessus, on obtient par dérivée d'une composée que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n+1)}(x) = \left(x + \frac{n\pi}{2}\right)' \sin'\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = 1 \times \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

D'autre part,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$ i.e. $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).}$$

II.2 **Méthode 1.** Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes :

$$\sin^3(x) = \sin(x)\sin^2(x) = \sin(x)\frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\sin(x).$$

Or pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(-a+b)}{2}$. Donc en appliquant cette formule avec $a = 2x$ et $b = x$,

$$\sin^3(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{4}\left(\sin(3x) + \sin(-2x+x)\right) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

Notez que l'on obtient une fonction impaire ce qui est bien cohérent avec le fait que $x \mapsto \sin^3(x)$ est impaire.

Méthode 2. Soit $x \in \mathbb{R}$, par la formule d'Euler, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 &= \frac{e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{3ix}}{-8i} \\
&= \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{-8i} + 3\frac{-e^{ix} + 3e^{-ix}}{-8i} \\
&= \frac{\sin(3x)}{-4} - 3\frac{\sin(x)}{-4} = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).
\end{aligned}$$

Quelque soit la méthode employée, on conclut que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).}$$

II.3 Soit $f : x \mapsto \sin^3(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrons la propriété $Q(n)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Initialisation. Si $n = 0$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x) = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{0\times\pi}{2}\right) - \frac{3^0}{4}\sin\left(3x + \frac{0\times\pi}{2}\right).$$

Donc $Q(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $Q(n)$ vraie. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

La fonction $f^{(n)}$ est bien dérivable comme somme de fonctions dérivable et en dérivant cette égalité (qui est vraie sur $\mathbb{R}$ tout entier) et on obtient

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{3}{4}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)'\sin'\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)'\sin'\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)\\ &= \frac{3}{4}\sin'\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\times 3\sin'\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Or on a vu (question 1) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(u) = \sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{3^{n+1}}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) - \frac{3^{n+1}}{4}\sin\left(3x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

ce qui démontre que $Q(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ est vraie.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right).}$$

III Complément de cours

Théorème VI.6 (Théorème de la bijection - version 1)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes $a < b$ (éventuellement infinies) et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I alors pour tout k compris entre les limites de f en a et b, il existe un unique $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

Remarque 53 : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes $a < b$ (éventuellement infinies) et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone sur I alors le théorème précédent assure que $J = f(I)$ est un intervalle. Il est de plus de même nature que I. Plus précisément :

I	si f est croissante	si f est décroissante
$[a;b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x); f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x); f(b)\right]$	$\left[f(b); \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x); \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x); \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

Théorème VI.7 (Théorème de la bijection - version 2)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I alors

- $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f réalise une bijection de I dans J,
- l'application réciproque f^{-1} est une bijection de $J \to I$, continue et strictement monotone sur J, de même monotonie que f.