Pour dimanche 28/10

I Se tester

I.1 Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tout $(a, b) \in I$, on a

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \Rightarrow \quad x \in I,$$

autrement dit si pour tout $(a, b) \in I$, $[a; b] \subseteq I$.

I.2 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a par définition $d(x, y) = |x - y| = |y - x|$. De plus pour tout $h > 0$,

$$d(x; y) \leqslant h \qquad \Leftrightarrow \qquad y - h \leqslant x \leqslant y + h \qquad \Leftrightarrow \qquad x - h \leqslant y \leqslant x + h.$$

II S'entraîner

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z suivante :

$$z^{14} + 4 = (3 + i)\, z^7.$$

Posons $\omega = z^7$. On a alors les équivalences suivantes :

$$(E) : \quad z^{14} + 4 = (3 + i)\, z^7 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega^2 + 4 = (3 + i)\, \omega \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega^2 - (3 + i)\, \omega + 4 = 0.$$

Soit Δ le discriminant du polynôme $\omega^2 - (3 + i)\, \omega + 4$. On a

$$\Delta = (3 + i)^2 - 16 = 9 + 6i - 1 - 16 = -8 + 6i \neq 0.$$

Le complexe Δ étant non nul, possède deux racines complexes distinctes. Soit $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x + iy)^2 = \Delta \\ |x + iy|^2 = |\Delta| \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -8 + 6i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \qquad \text{par unicité de la forme algébrique d'un complexe} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 = -8 + 10 \qquad (L_1 + L_3) \\ xy = 3 \\ 2y^2 = 10 + 8 \qquad (L_3 - L_1) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = 3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x| = 1 \\ |y| = 3 \\ xy \text{ sont de même signe car } xy > 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \text{ et } y = 3 \\ \text{OU} \\ x = -1 \text{ et } y = -3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \delta = 1 + 3i \\ \text{OU} \\ \delta = -1 - 3i \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que les racines du polynôme $\omega^2 - (3+i)\,\omega + 4$ sont

$$\omega_1 = \frac{3+i+1+3i}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2+2i \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \frac{3+i-1-3i}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i.$$

Ainsi, on a

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \omega = 2+2i \\ \text{OU} \\ \omega = 1-i \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z^7 = 2+2i \\ \text{OU} \\ z^7 = 1-i \end{cases}$$

- Déterminons les racines $7^{\text{ièmes}}$ de $2+2i$. On a $2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi,

$$z^7 = 2+2i \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \sqrt[7]{2\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{28}+i\frac{2k\pi}{7}} = 8^{\frac{1}{14}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{28}+i\frac{2k\pi}{7}}.$$

- Déterminons les racines $7^{\text{ièmes}}$ de $1-i$. On a $1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi,

$$z^7 = 1-i \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \sqrt[7]{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{28}+i\frac{2k\pi}{7}} = 2^{\frac{1}{14}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{28}+i\frac{2k\pi}{7}}.$$

De ces études, on en déduit que

$$\boxed{z^{14} + 4 = (3+i)\,z^7 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{8^{\frac{1}{14}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{28}+i\frac{2k\pi}{7}}, 2^{\frac{1}{14}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{28}+i\frac{2k\pi}{7}}\right\}.}$$

III Complément de cours

Théorème VI.8 (Dérivée de la réciproque)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Soient $a \in I$ et $b = f(a)$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}.$$

Démonstration. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. On pose $J = f(I)$.

III.1 Puisque I est un intervalle, que f est continue et strictement monotone sur I, d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de I dans l'intervalle $J = f(I)$, et sa réciproque f^{-1} est continue sur J (et strictement monotone de même monotonie que f).

Soit $a \in I$ tel que f soit dérivable en a et tel que $f'(a) \neq 0$. Posons $b = f(a)$.

III.2 Soit $y \in J \setminus \{b\}$, on a par définition

$$\tau_b\left(f^{-1}\right)(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b}.$$

Or $b = f(a)$ et donc $a = f^{-1}(b)$. De même en posant $x = f^{-1}(y)$, on a $y = f(x)$. Grâce à ces égalités, on obtient

$$\tau_b\left(f^{-1}\right)(y) = \frac{x-a}{f(x)-f(a)}.$$

III.3 De la question précédente, on en déduit directement que pour tout $y \in J \setminus \{b\}$,

$$\tau_b\left(f^{-1}\right)(y) = \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \frac{1}{\tau_a(f)(x)} \overset{x=f^{-1}(y)}{=} \frac{1}{\tau_a(f)\left(f^{-1}(y)\right)}$$

III.4 D'après la question III.1, la fonction f^{-1} est continue. Par conséquent

$$\lim_{y\to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b).$$

De plus, par hypothèse, f est dérivable en a, i.e.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \tau_a\left(f\right)\left(x\right) = f'(a).$$

III.5 Par la question précédente, on a $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(b) = a$ quand $y \to b$, donc

$$\lim_{\substack{y\to b\\ y\neq b}} \tau_a\left(f\right)\left(f^{-1}(y)\right) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \tau_a\left(f\right)\left(x\right).$$

De la question précédente, on en déduit également

$$\lim_{\substack{y\to b\\ y\neq b}} \tau_a\left(f\right)\left(f^{-1}(y)\right) = f'(a).$$

III.6 On sait que $f'(a) \neq 0$ donc de la question précédente, on en déduit que

$$\lim_{\substack{y\to b\\ y\neq b}} \frac{1}{\tau_a\left(f\right)\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Ainsi de la question III.3, on obtient

$$\lim_{\substack{y\to b\\ y\neq b}} \tau_b\left(f^{-1}\right)\left(y\right) = \lim_{\substack{y\to b\\ y\neq b}} \frac{1}{\tau_a\left(f\right)\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Donc par définition, f^{-1} est dérivable en b et de plus

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

$\square$