Pour lundi 29/10

I Se tester

I.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, alors $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

I.2 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$. Si
- $g(I) \subseteq J$,
- g dérivable sur I,
- f dérivable sur J

Alors $f \circ g$ est dérivable sur I. De plus,

$$\forall t \in I, \quad (f \circ g)'(t) = g'(t) f'(g(t)).$$

On pouvait aussi l'énoncer en un seul point $a \in I$...

II S'entraîner

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x) + 1.$$

II.1 La fonction f n'est ni paire ni impaire. En effet $f(0) = 3 + 1 = 4 \neq 0$ donc la fonction f n'est pas impaire (est-ce bien clair pour vous qu'une fonction impaire passe nécessairement par $(0;0)$? Sauriez-vous le démontrer ?). Sinon nous pouvions aussi remarquer que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + 1 = -1$ et $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 1 = 3$. Donc on remarque que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas impaire}}$ et de même $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas paire}}$.
La fonction f est 2π-périodique. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + 2\pi) = 3\cos(x + 2\pi) - 2\sin(x + 2\pi) + 1 = 3\cos(x) - 2\sin(x) + 1 = f(x),$$

car cos et sin sont 2π-périodiques. Donc $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$.

II.2 **Méthode 1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos(x) \leqslant 1$ et $\sin(x) \geqslant -1$ donc $3\cos(x) \leqslant x$ et $-2\sin(x) \leqslant 2$. Ainsi

$$f(x) \leqslant 3 + 2 + 1 = 6.$$

De même on a $\cos(x) \geqslant -1$ et $\sin(x) \leqslant 1$ donc,

$$f(x) \geqslant -3 - 2 + 1 = -4.$$

Ainsi la fonction f est majorée par 6 et minorée par -4 et est donc bornée sur $\mathbb{R}$. **Méthode 2.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par l'inégalité triangulaire,

$$|f(x)| \leqslant |3\cos(x)| + |-2\sin(x)| + |1| = 3|\cos(x)| + 2|\sin(x)| + 1.$$

Or $|\cos(x)| \leqslant 1$ et $|\sin(x)| \leqslant 1$. Par conséquent,

$$|f(x)| \leqslant 3 + 2 + 1 = 6.$$

Donc par la proposition III.9 du chapitre 6, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bornée}}$.

II.3 Posons $x = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $y = \frac{2}{\sqrt{13}}$. On a

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{13} + \frac{4}{13} = 1.$$

Donc par la paramétrage du cercle trigonométrique (proposition V.4 du chapitre 2), on en déduit
$\boxed{\text{il existe } a \in [0; 2\pi[\text{ tel que } \cos(a) = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ et } \sin(a) = \frac{2}{\sqrt{13}}.}$

II.4 Un petit coup de forme polaire de $3\cos(x) - 2\sin(x)$ que vous n'avez, bien entendu pas oublié : soit $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x) + 1 &= \sqrt{13}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\cos(x) - \frac{2}{\sqrt{13}}\sin(x)\right) + 1 \\ &= \sqrt{13}\left(\cos(a)\cos(x) - \sin(a)\sin(x)\right) + 1 \\ &= \sqrt{13}\cos(x+a) + 1 \end{aligned}$$

Alors d'une part, on en déduit que $\sqrt{13}+1$ est un majorant de f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+a) \leqslant 1$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant \sqrt{13} + 1,$$

qui est vous le noterez plus précis que le majorant obtenu à la question II.2.
De plus ce majorant est atteint : si $x = -a \in \mathbb{R}$ alors $f(-a) = \sqrt{13}\cos(0) + 1 = \sqrt{13}+1$. Donc $\sqrt{13}+1$ est LE maximum de f et est atteint en $x = -a$ (et même pour les $x \equiv -a\ [2\pi]$).
D'autre part, $1 - \sqrt{13}$ est un minorant de f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geqslant -1$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant -\sqrt{13} + 1,$$

à nouveau ce minorant étant plus grand que $-4+1 = -3$ est plus précis que celui trouvé à la question II.2.
De plus ce minorant est atteint : si $x = \pi - a$, alors $f(x) = f(\pi - a) = \sqrt{13}\cos(\pi - a + a) + 1 = -\sqrt{13}+1$. Donc $1 - \sqrt{13}$ est LE minimum de f et est atteint tous les $(2k+1)\pi - a$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Conclusion } 1+\sqrt{13} \text{ est le maximum de } f \text{ et } 1-\sqrt{13} \text{ est le minimum de } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$

III Complément de cours

Alors avez-vous trouvé ce qui peut bien poser problème ici ?
Pour tout réel x, on a

$$x^2 = x \times x = \underbrace{x + x + \cdots + x + x}_{x \text{ fois}}.$$

Or la fonction $x \mapsto x^2$ étant dérivable, en dérivant, on obtient

$$2x = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{x \text{ fois}} = x.$$

L'égalité étant vraie pour tout réel x, on en déduit que

$$2 = 1.$$

N'y aurait-il pas une (voire deux ?) erreur de raisonnement ?